

ÉLECTROMAGNÉTISME

corrigé de la 1ère série de problèmes

LIGNES DE TRANSMISSION

Problème 1.1 Déterminer le temps qu'il faut à un signal pour parcourir une ligne de 25 centimètres de long, sachant que l'isolant qui remplit la ligne a une permittivité relative de $\epsilon_r = 4,25$. S'il s'agit d'un signal périodique, quelle doit être sa fréquence pour que le temps de transit soit égal à 10% de la période?

La vitesse de propagation est de

$$\frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{4,25}} = 1,45521 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cong 1,455 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cong 1,46 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Il est inutile de garder "trop" de décimales, mais il faut en garder "assez": l'erreur d'arrondi ne devrait en aucun cas dépasser 1%.

Pour parcourir 0.25 m, il faut alors $\tau = \frac{0,25 \text{ m}}{c} = \frac{0,25 \text{ m}}{1,4552 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 1,718 \cdot 10^{-9} \text{ s} \cong 1,72 \text{ ns}$

Si cette durée est un dixième de période, la fréquence du signal est de

$$f = \frac{1}{10 \cdot 1,718 \cdot 10^{-9} \text{ s}} = 58208550 \text{ Hz} \cong 58,2 \text{ MHz}$$

Remarque: dans la notation des ingénieurs, on exprime les résultats en termes de 10^{n-3} , avec les préfixes kilo, Méga, Giga, Tera, Peta pour les valeurs positives de n , et milli, micro (μ), nano, pico, femto, atto pour les valeurs négatives de n . On évite ainsi des erreurs potentielles. Par ailleurs, il fut écrire MHz et non Mhz.

Problème 1.2 Le signal dans une ligne de transmission se déplace avec une vitesse qui est le quart de la vitesse de la lumière dans le vide. Sachant que l'impédance caractéristique de la ligne vaut 186Ω , on demande de déterminer la capacité linéique C' et l'inductance linéique L' de la ligne

La capacité par unité de longueur est donnée par:

$$C' = \frac{1}{c \cdot Z_c} = \frac{4}{c_0 \cdot Z_c} = \frac{2}{3 \cdot 10^8 \cdot 186} = 7,168 \cdot 10^{-11} \text{ F/m} \cong 71,2 \text{ pF/m} \cong 0,072 \text{ nF/m}$$

L'inductance par unité de longueur est obtenue similairement:

$$L' = \frac{Z_c}{c} = \frac{4 \cdot Z_c}{c_0} = \frac{4 \cdot 186}{3 \cdot 10^8} = 2,48 \cdot 10^{-6} \text{ H/m} \cong 2,48 \mu\text{H/m}$$

Attention: ces deux quantités sont des grandeurs linéiques — c'est à dire par unité de longueur, leurs dimensions sont respectivement des F/m et des H/m !!!

Attention: l'unité d'inductance est le Henry [Vs/Am] et non le Tesla [Vs/m²] qui est l'unité du champ d'induction.

Problème 1.3 On veut réaliser une ligne de transmission bifilaire entourée d'un matériau isolant (non-magnétique) ayant une permittivité relative de $\epsilon_r = 2,24$. L'impédance caractéristique de la ligne doit valoir 100Ω , et le rayon d'un conducteur est de 1 mm . Déterminer la distance entre les centres des deux conducteurs.

À partir de la relation pour l'impédance caractéristique de la ligne bifilaire, on trouve que

$$d = R \cosh\left(\sqrt{\epsilon_r} Z_c / 120\right) = R \cosh\left(\sqrt{2,24} 100 / 120\right) \text{ mm} = 1,884 \text{ mm}$$

Mais, en regardant la figure correspondante, on constate que la distance entre les deux centres est

$$2d = 2 \cdot 1,884 \text{ mm} = 3,768 \text{ mm} \cong 3,77 \text{ mm}$$

ÉLECTROMAGNÉTISME

Corrigé de la 2ème série de problèmes

LIGNES EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Problème 2.1 Montrer, dans le domaine temporel, que sur une ligne avec pertes $R'G'C'$ ($L'=0$) la tension

$$u(t, z) = u_0 \cos(\omega t - \beta z) e^{-\alpha z}$$

satisfait l'équation d'onde ou équation des télégraphistes

$$\frac{\partial^2 u(t, z)}{\partial z^2} = R' C' \frac{\partial u(t, z)}{\partial t} + R' G' u(t, z)$$

Déterminer la valeur de α et β en fonction des autres paramètres.
Déterminer également la valeur du courant et de la puissance sur cette ligne.

On dérive deux fois par rapport à z , ce qui donne:

$$\frac{\partial u(t, z)}{\partial z} = \beta u_0 \sin(\omega t - \beta z) e^{-\alpha z} - \alpha u_0 \cos(\omega t - \beta z) e^{-\alpha z}$$

$$\frac{\partial^2 u(t, z)}{\partial z^2} = (\alpha^2 - \beta^2) u_0 \cos(\omega t - \beta z) e^{-\alpha z} - 2\alpha\beta u_0 \sin(\omega t - \beta z) e^{-\alpha z}$$

Le terme de droite de l'équation des télégraphistes donne

$$R' C' \frac{\partial u(t, z)}{\partial t} + R' G' u(t, z) = -\omega R' C' u_0 \sin(\omega t - \beta z) e^{-\alpha z} + R' G' u_0 \cos(\omega t - \beta z) e^{-\alpha z}$$

On identifie les termes en cosinus et ceux en sinus, ce qui donne:

$$\alpha^2 - \beta^2 = R' G' \quad \text{et} \quad 2\alpha\beta = \omega R' C'$$

On tire α de la seconde relation, on l'introduit dans la première, ce qui donne une équation bicarrée pour β , que l'on résout et on obtient "après quelques calculs" (formule consacrée):

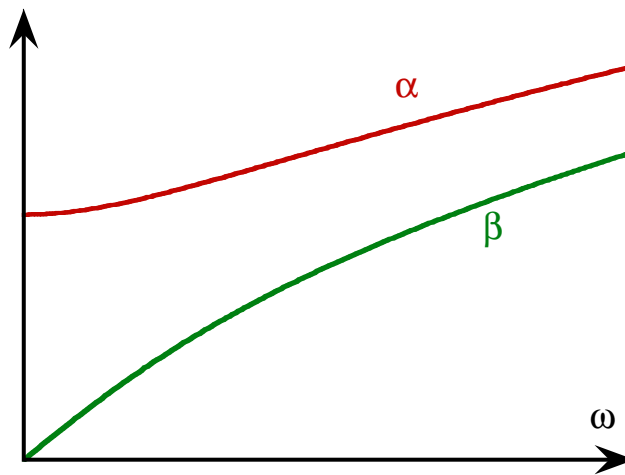
$$\beta = \sqrt{\frac{R'}{2} \left(\sqrt{G'^2 + \omega^2 C'^2} - G' \right)}$$

On procède exactement de la même façon pour trouver α :

$$\alpha = \sqrt{\frac{R'}{2} \left(\sqrt{G'^2 + \omega^2 C'^2} + G' \right)}$$

Remarque: on prend le signe positif pour les deux racines, d'une part parce que α et β sont par définition toutes deux des valeurs réelles, ensuite par convention, pour que les notations correspondent à celles utilisées dans le livre.

L'allure des courbes est donnée dans la figure



On trouve ensuite le courant

$$i(t, z) = -\frac{1}{R'} \frac{\partial u(t, z)}{\partial z} = \frac{u_0 e^{-\alpha z}}{R'} [\alpha \cos(\omega t - \beta z) - \beta \sin(\omega t - \beta z)]$$

On trouve ensuite la puissance

$$\begin{aligned} p(t, z) &= u(t, z) \cdot i(t, z) = \frac{u_0^2 e^{-2\alpha z}}{R'} [\alpha \cos^2(\omega t - \beta z) - \beta \sin(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z)] \\ &= \frac{u_0^2 e^{-2\alpha z}}{2R'} [\alpha (1 + \cos 2(\omega t - \beta z)) - \beta \sin 2(\omega t - \beta z)] \end{aligned}$$

La valeur moyenne des fonctions sinusoïdales est nulle, de sorte que

$$\langle p(t, z) \rangle = \frac{\alpha u_0^2 e^{-2\alpha z}}{2R'}$$

Dans le domaine fréquentiel, on cherche le phaseur de tension

$$u(t, z) = u_0 \cos(\omega t - \beta z) e^{-\alpha z} = \operatorname{Re} \left[u_0 e^{j\omega t} e^{-j\beta z} e^{-\alpha z} \right] = \operatorname{Re} \left[\sqrt{2} \underline{U}(z) e^{j\omega t} \right]$$

en identifiant, on trouve que

$$\underline{U}(z) = \frac{u_0}{\sqrt{2}} e^{-(\alpha + j\beta)z}$$

L'équation des télégraphistes donne ici:

$$\frac{d^2 \underline{U}(z)}{dz^2} = (\alpha + j\beta)^2 = (j\omega R' C' + R' G') \underline{U}(z)$$

On retrouve bien les mêmes valeurs pour α et β que dans le traitement précédent.

ATTENTION: 1) le vecteur phaseur n'est pas une fonction du temps, et

donc $\frac{\partial \underline{U}(z)}{\partial t} \equiv 0$

2) les grandeurs complexes n'existent que dans le domaine fréquentiel, on ne peut jamais avoir des grandeurs complexes qui dépendent du temps, ou des mélanges des deux notations.

Le courant est donné par

$$\underline{I}(z) = -\frac{1}{R'} \frac{d\underline{U}(z)}{dz} = \frac{\alpha + j\beta}{R'} \underline{U}(z) = \frac{\alpha + j\beta}{R'} \frac{u_0}{\sqrt{2}} e^{-(\alpha + j\beta)z}$$

La puissance complexe est alors donnée par

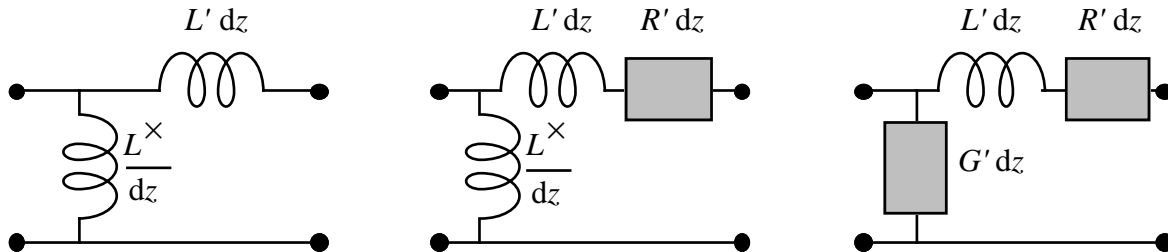
$$\underline{S}(z) = \underline{U}(z) \cdot \underline{I}^*(z) = \frac{\alpha - j\beta}{2R'} u_0^2 e^{-2\alpha z}$$

On peut vérifier que la partie réelle correspond bien à la puissance moyenne.

ATTENTION: il n'y a pas de relation qui permette de retrouver la puissance en fonction du temps à partir de la puissance complexe. On peut par exemple vérifier que

$$p(t, z) \neq \operatorname{Re} \left[\sqrt{2} \underline{S}(z) e^{j\omega t} \right]$$

Problème 2.2 Etudier la propagation sur des lignes dont les schémas équivalents (pour des longueurs infinitésimales de ligne dz) sont donnés ci-après. Déterminer dans chaque cas l'exposant de propagation, les vitesses de phase et de groupe, en fonction de la pulsation ω :



a) ligne LL: l'impédance linéique est ici $\underline{Z}' = j\omega L'$ et l'admittance linéique $\underline{Y}' = 1/j\omega L^x$

L'exposant de propagation est alors donné par $\underline{\gamma} = \sqrt{\frac{j\omega L'}{j\omega L^x}} = \sqrt{\frac{L'}{L^x}} = \alpha$

Il est purement réel, positif et constant. On a donc $\beta = 0$ et les vitesses de propagation ne sont pas définies — ou encore elles sont infinies, ce qui implique que les phénomènes se répercutent instantanément. Ceci n'est pas physiquement réalisable, mais peut être une approximation acceptable lorsque les périodes sont très longues (§ 2.2.6).

b) ligne LRL: l'impédance linéique est ici $\underline{Z}' = R' + j\omega L'$ et l'admittance linéique $\underline{Y}' = 1/j\omega L^x$

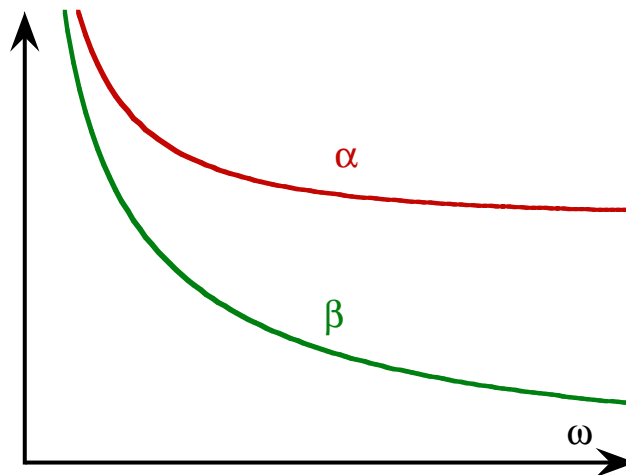
L'exposant de propagation est alors donné par

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{j\omega L^x}} = \sqrt{\frac{L'}{L^x} - j\frac{R'}{\omega L^x}} = \alpha + j\beta$$

En développant comme dans le problème 2.1, on trouve que

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2L^x} \left(\sqrt{L'^2 + (R'/\omega)^2} + L' \right)} \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{2L^x} \left(\sqrt{L'^2 + (R'/\omega)^2} - L' \right)}$$

L'allure des courbes est donnée dans la figure



La vitesse de phase est simplement donnée par ω/β , tandis que pour obtenir la vitesse de groupe, il faut dériver l'expression pour β – ou plutôt son carré, pour faire disparaître une des deux racines :

$$\frac{\partial(\beta)^2}{\partial\omega} = 2\beta \frac{\partial\beta}{\partial\omega} = \frac{1}{2L'} \frac{2R'}{\omega} \cdot \left(-\frac{R'}{\omega^2}\right) = -\frac{1}{2L'\omega^3} \frac{R'^2}{\sqrt{L'^2 + (R'/\omega)^2}}$$

et on a finalement

$$v_g = -\frac{4L'\omega^3\beta\sqrt{L'^2 + (R'/\omega)^2}}{R'^2}$$

Pour bien montrer que c'est compliqué, on peut encore remplacer β par son expression complète, mais ce n'est pas absolument indispensable.

On note toutefois (figure ou formule) que lorsque la fréquence augmente, la vitesse de groupe devient supérieure à la vitesse de la lumière, ce qui n'est pas physiquement possible. On ne peut en fait pas négliger les capacités qui apparaissent entre les spires des inductances.

c) ligne LRG: l'impédance linéique est ici $\underline{Z}' = R' + j\omega L'$ et l'admittance linéique $\underline{Y}' = G'$

L'exposant de propagation est alors donné par

$$\underline{\gamma} = \sqrt{G'(R' + j\omega L')} = \sqrt{R'G' + j\omega L'G'} = \alpha + j\beta$$

On procède comme dans les problèmes précédents et on trouve que

$$\alpha = \sqrt{\frac{G'}{2} \left(\sqrt{R'^2 + (\omega L')^2} + R' \right)} \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt{\frac{G'}{2} \left(\sqrt{R'^2 + (\omega L')^2} - R' \right)}$$

Les courbes ont la même allure que celles obtenues dans le problème 2.1.

La vitesse de phase est donnée par ω/β , tandis que pour obtenir la vitesse de groupe, on dériver l'expression pour β – ou plutôt son carré, pour faire disparaître une des racines :

$$\frac{\partial(\beta)^2}{\partial\omega} = 2\beta \frac{\partial\beta}{\partial\omega} = \frac{G'}{2} \frac{\omega L'^2}{\sqrt{R'^2 + (\omega L')^2}}$$

et on a finalement

$$v_g = \frac{4\beta}{G'\omega L'^2} \sqrt{R'^2 + (\omega L')^2}$$

Ici aussi, on peut montrer que c'est vraiment très compliqué en remplaçant β par son expression complète.

Quelques conseils:

Simplifiez le plus possible les formules.

Cherchez si les résultats obtenus peuvent avoir une signification en termes des données du problème, et si les dimensions sont au moins correctes.

Essayez d'esquisser l'allure des courbes — en commençant près de $\omega = 0$ et de $\omega = \infty$.

Il est toujours permis aussi de chercher dans le livre: le problème à traiter peut être un cas particulier d'un problème qui est abordé dans le cours, il peut aussi être semblable (voire identique?) à l'un des problèmes donnés à la fin d'un des chapitres.

ÉLECTROMAGNÉTISME

Corrigé de la 3ème série de problèmes

LIGNE SANS PERTES

Problème 3.1 Une ligne de transmission sans pertes a une impédance caractéristique de 100Ω . On demande de déterminer les matrices d'impédance, d'admittance et de chaîne, puis de dessiner les schémas équivalents en **T** et en **Π** pour les six longueurs de ligne suivantes:

$$d = 0,24 \lambda \quad d = 0,249 \lambda \quad d = 0,2499 \lambda \quad d = 0,2501 \lambda \quad d = 0,251 \lambda \quad d = 0,26 \lambda$$

Dans toutes les relations donnant les matrices et composants du schéma équivalent, on a besoin de $\beta d = (2\pi/\lambda)d = 2\pi(d/\lambda)$. Il faut donc multiplier par 2π les valeurs ci-dessus pour obtenir les déphasages en radians. Vu le grand nombre de chiffres à déterminer, la présentation sous forme de tableau est fortement recommandée, et l'emploi d'un tableur, comme par exemple EXCEL, permet d'obtenir les valeurs en un clin d'oeil:

d/λ (données)		0.24000	0.24900	0.24990	0.25000	0.25010	0.25100	0.26000
$\beta d = 2\pi/\lambda d / = 2\pi d/\lambda$		1.50796	1.56451	1.57017	1.57080	1.57142	1.57708	1.63363
$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22} = -jZ_c \cotan(\beta d)$	-j	6.29147	0.62833	0.06283	0.00000	-0.06283	-0.62833	-6.29147
$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -jZ_c / \sin(\beta d)$	-j	100.19772	100.00197	100.00002	100.00000	100.00002	100.00197	100.19772
$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22} = -jY_c \cotan(\beta d)$	-j	0.00063	0.00006	0.00001	0.00000	-0.00001	-0.00006	-0.00063
$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -jY_c / \sin(\beta d)$	j	0.01002	0.01000	0.01000	0.01000	0.01000	0.01000	0.01002
$\underline{A} = \underline{D} = \cos(\beta d)$		0.06279	0.00628	0.00063	0.00000	-0.00063	-0.00628	-0.06279
$\underline{B}_- = -jZ_c \sin(\beta d)$	-j	99.80267	99.99803	99.99998	100.00000	99.99998	99.99803	99.80267
$\underline{C}_- = -jY_c \sin(\beta d)$	-j	0.00998	0.01000	0.01000	0.01000	0.01000	0.01000	0.00998
T $\underline{Z}_s = jZ_c \tan(\beta d/2)$	j	93.90625	99.37365	99.93719	100.00000	100.06285	100.63030	106.48918
T $\underline{Z}_p = -jZ_c / \sin(\beta d)$	-j	100.19772	100.00197	100.00002	100.00000	100.00002	100.00197	100.19772
Π $\underline{Z}_s = jZ_c \sin(\beta d)$	j	99.80267	99.99803	99.99998	100.00000	99.99998	99.99803	99.80267
Π $\underline{Z}_p = -jZ_c \cotan(\beta d/2)$	-j	106.48918	100.63030	100.06285	100.00000	99.93719	99.37365	93.90625

On constate que les longueurs de ligne se situent de part et d'autre de la ligne quart d'onde (utilisée pour l'adaptation), pour laquelle les termes diagonaux des 3 matrices s'annulent. Ces termes changent de signe lors du passage par $\lambda/4$, les autres ayant un comportement symétrique.

Problème 3.2 Une ligne de transmission sans pertes ayant une impédance caractéristique de 50Ω aboutit à une terminaison dont l'impédance vaut $80 - j 60 \Omega$.

Déterminer, en fonction de la position le long de la ligne, le facteur de réflexion et l'impédance localisée, et esquisser – approximativement – l'allure de leurs parties réelles et imaginaires.

Calculer également le rapport d'onde stationnaire (ROS).

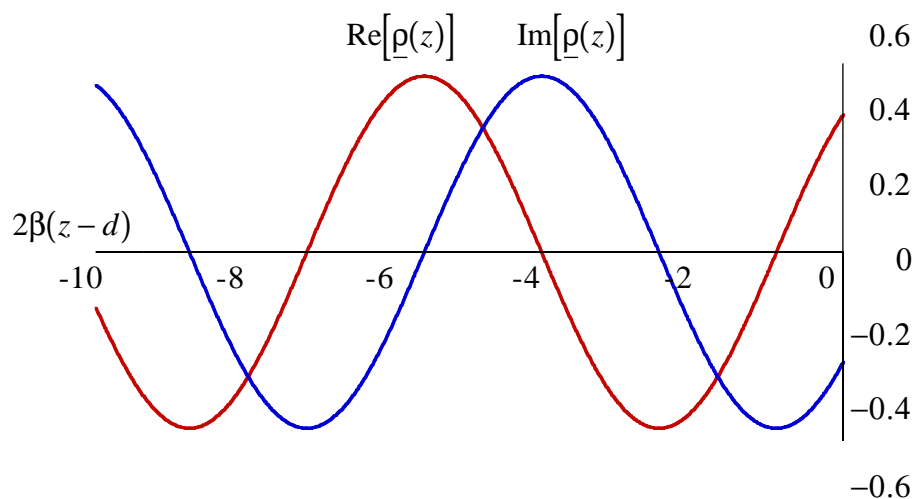
À quelles distances de la terminaison (par rapport à la longueur d'onde) la partie imaginaire de l'impédance passe-t-elle par un maximum et par un minimum, et que vaut-elle alors?

Le facteur de réflexion au droit de la terminaison est donné par

$$\underline{\rho}_t = \frac{80 - j60 - 50}{80 - j60 + 50} = \frac{30 - j60}{130 - j60} = \frac{3 - j6}{13 - j6} = \frac{75 - j60}{205} = 0,3659 - j0,2927 = 0,4686 e^{-j0,675}$$

Aux autres positions le long de la ligne, on obtient alors en fonction de z :

$$\begin{aligned} \underline{\rho}(z) &= 0,4686 e^{[2j\beta(z-d) - j0,675]} \\ &= 0,4686 \{ \cos[2\beta(z-d) - 0,675] + j \sin[2\beta(z-d) - 0,675] \} \end{aligned}$$



Le module du facteur de réflexion est constant, sa phase est une fonction linéaire de la position.

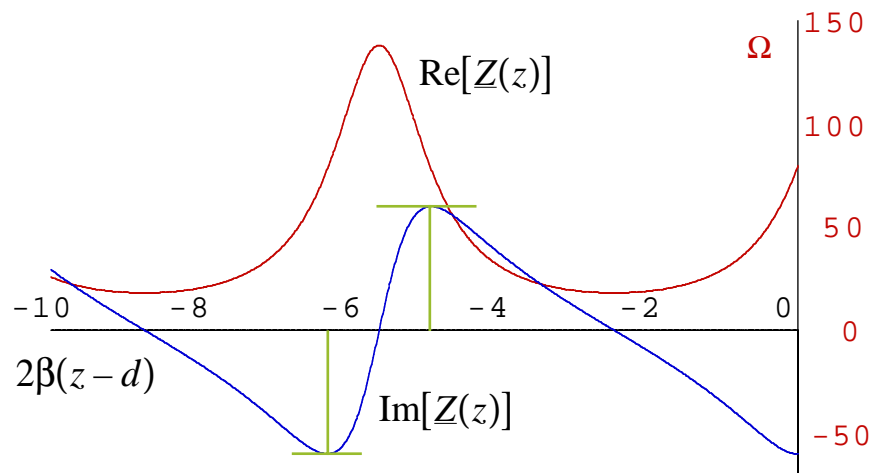
Le ROS vaut $(1 + 0,4686)/(1 - 0,4686) = 2,764$

L'impédance localisée est donnée par:

$$\underline{Z}(z) = Z_c \frac{R_t + jX_t - jZ_c \tan[\beta(z-d)]}{Z_c - j(R_t + jX_t) \tan[\beta(z-d)]}$$

$$= Z_c \frac{R_t Z_c \{1 + \tan^2[\beta(z-d)]\} + j \{ (R_t^2 + X_t^2 - Z_c^2) \tan[\beta(z-d)] + Z_c X_t (1 - \tan^2[\beta(z-d)]) \}}{\{Z_c + X_t \tan[\beta(z-d)]\}^2 + R_t^2 \tan^2[\beta(z-d)]}$$

$$= \frac{400 \{1 + \tan^2[\beta(z-d)]\} + j \{750 \tan[\beta(z-d)] - 300(1 - \tan^2[\beta(z-d)])\}}{5 - 12 \tan[\beta(z-d)] + 20 \tan^2[\beta(z-d)]}$$



La partie imaginaire de l'impédance passe par un maximum lorsque $\beta(z-d) = -2,455 - n\pi$

Elle passe par un minimum lorsque $\beta(z-d) = -0,01 - n\pi$

ÉLECTROMAGNÉTISME

4ème série de problèmes

ABAQUE DE SMITH ET ADAPTATION

Problème 4.1 Déterminer dans le plan complexe des $\underline{Z}/\underline{Z}_c$ le lieu des points pour lesquels:

$$\text{a) } |\underline{\rho}| = 0,7 = \left| \frac{\underline{Z}/\underline{Z}_c - 1}{\underline{Z}/\underline{Z}_c + 1} \right| = \left| \frac{x + jy - 1}{x + jy + 1} \right| = \sqrt{\frac{(x-1)^2 + y^2}{(x+1)^2 + y^2}}$$

$$\rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 0,49[(x+1)^2 + y^2] \rightarrow 0,51x^2 - 2,98x + 0,51y^2 + 0,51 = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 5,843x + y^2 = -1 \rightarrow (x - 2,9216)^2 + y^2 = -1 + 8,5356 = 7,5356 = 2,745^2$$

C'est l'équation d'un cercle de rayon 2,754 centré au point (2,9216, 0)

On obtient le même résultat en constatant que $|\underline{\rho}| = 0,7$ correspond à un cercle dans l'abaque de Smith, qui se transforme en un cercle dans le plan $\underline{Z}/\underline{Z}_c$ — la transformation conforme conservant les cercles. Ce cercle doit être disposé symétriquement par rapport à l'axe réel — les angles étant aussi conservés. Il suffit alors de trouver les deux intersections, en $\underline{Z}/\underline{Z}_c = (1 + 0,7)/(1 - 0,7) = 5,6666$ et en $\underline{Z}/\underline{Z}_c = (1 - 0,7)/(1 + 0,7) = 0,17647$. La moyenne de ces deux valeurs donne la position du centre, la demi-différence donne le rayon.

$$\text{b) } \arg(\underline{\rho}) = \arg\left(\frac{x + jy - 1}{x + jy + 1}\right) = -60^\circ$$

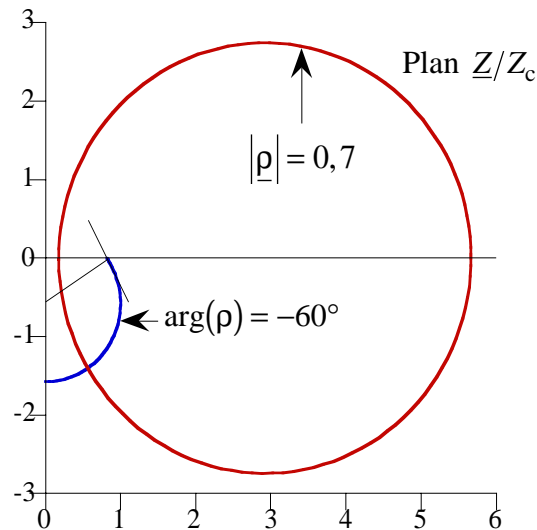
Le quotient de la partie imaginaire par la partie réelle donne $\rightarrow \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} = \tan(-60^\circ) = -\sqrt{3}$

$$\text{On développe: } x^2 + y^2 - 1 = -\frac{2y}{\sqrt{3}} \rightarrow x^2 + y^2 + \frac{2y}{\sqrt{3}} = 1 \rightarrow x^2 + \left(y + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 + \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$$

C'est l'équation d'un cercle, de rayon $2/\sqrt{3}$, centré en $(0, -1/\sqrt{3})$.

Dans l'abaque de Smith, $\arg(\underline{\rho}) = -60^\circ$ est une droite partant du centre, faisant un angle de -60° avec l'axe réel. Cette droite se transforme en un cercle (dont la droite est un cas particulier)

dans le plan \underline{Z}/Z_c , centré sur l'axe imaginaire et passant par le point (1,0) où sa tangente fait un angle de -60° avec l'axe réel. Pour trouver le centre, on trace une perpendiculaire à la tangente (voir figure) qui coupe l'axe imaginaire en $-1/\sqrt{3}$. On trouve le rayon par Pythagore.



Problème 4.2 On veut adapter (sans réflexion) une terminaison d'impédance Z_t à une ligne d'impédance caractéristique $Z_c = 60 \Omega$ pour les deux cas suivants et les 6 types d'adaptation:

1) $Z_t = 82 + j 38,2 \Omega$

$Z_t/Z_c = 1,3666 + j 0,637$

- a) segment de ligne de transmission et inductance connectée en série,
 $d = 0,1633 \lambda \quad X = 37,7079 \text{ ohms}$
- b) segment de ligne de transmission et condensateur connecté en série,
 $d = 0,4617 \lambda \quad X = -37,7079 \text{ ohms}$
- c) segment de ligne de transmission et inductance connectée en parallèle,
 $d = 0,2117 \lambda \quad X = 95,4708 \text{ ohms}$
- d) segment de ligne de transmission et condensateur connecté en parallèle,
 $d = 0,4133 \lambda \quad X = -95,4708 \text{ ohms}$
- e) segment de ligne de transmission et transformateur quart d'onde (2 cas)
 $d_1 = 0,0625 \lambda \quad Z_x = 81,7 \text{ ohms} \quad d_{tr} = 0,25 \lambda$
 $d_2 = 0,3125 \lambda \quad Z_x = 44,1 \text{ ohms} \quad d_{tr} = 0,25 \lambda$
- f) transformateur généralisé.
 $Z_x = 94,3 \text{ ohms} \quad d_{tr} = 0,383 \lambda$

On admet que la longueur du dispositif d'adaptation est celle du segment — ou des segments — de ligne (on ne connaît pas les dimensions des réactances). Dans le cas présent, le dispositif le plus court est celui du cas a)

2) $Z_t = 50 + j 33 \Omega$

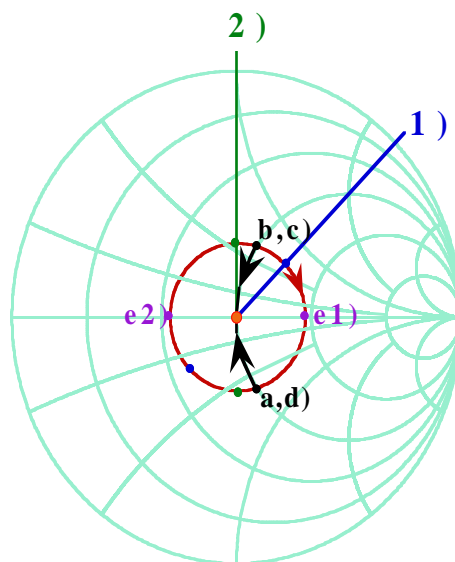
$Z_t/Z_c = 0,833 + j 0,55$

- a) segment de ligne de transmission et inductance connectée en série,
 $d = 0,2260 \lambda$ $X = 37,7730 \text{ ohms}$
- b) segment de ligne de transmission et condensateur connecté en série,
 $d = 0,0245 \lambda$ $X = - 37,7730 \text{ ohms}$
- c) segment de ligne de transmission et inductance connectée en parallèle,
 $d = 0,2745 \lambda$ $X = 95,306 \text{ ohms}$
- d) segment de ligne de transmission et condensateur connecté en parallèle,
 $d = 0,4760 \lambda$ $X = - 95,306 \text{ ohms}$
- e) segment de ligne de transmission et transformateur quart d'onde,
 $d_1 = 0,125 \lambda$ $Z_x = 81,8 \text{ ohms}$ $d_{tr} = 0,25 \lambda$
 $d_2 = 0,375 \lambda$ $Z_x = 44,0 \text{ ohms}$ $d_{tr} = 0,25 \lambda$
- f) transformateur généralisé.

Il n'y a pas de solution pour cet ensemble de paramètres

Dans le cas présent, le dispositif le plus court est celui du cas b)

La représentation graphique sur l'abaque de Smith est donnée dans la figure



CORRIGÉS DES EXERCICES

D'ÉLECTROMAGNÉTISME

SÉRIES 4 à 8

4ème série de problèmes: ABAQUE DE SMITH ET ADAPTATION

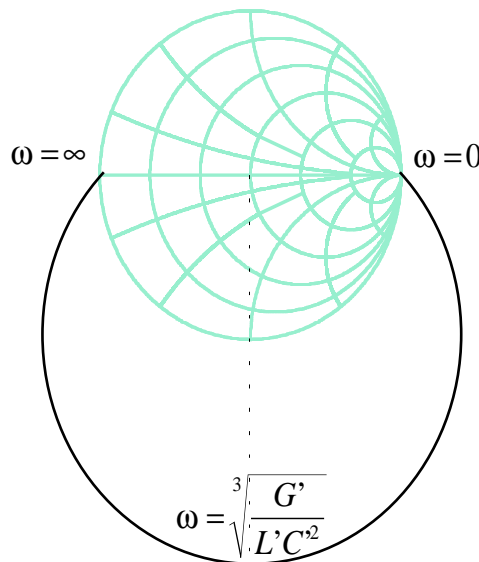
Problème 4.1 *Trouver, en fonction de la fréquence, le facteur de réflexion ρ_t d'une terminaison purement capacitive C_t connectée à l'extrémité d'une ligne avec pertes $L'G'$ (voir problème 2.1). Déterminer l'allure de la courbe dans le plan complexe de ρ et déterminer dans quelles conditions la réflexion est la plus grande.*

L'impédance de la terminaison vaut ici $Z_t = 1/j\omega C_t$, elle est purement réactive.

L'impédance caractéristique de la ligne, trouvée dans le problème 2.1, est complexe et vaut

$$Z_c = \sqrt{\frac{j\omega L'}{G'}} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega L'}{2G'}} \quad \text{et on a donc} \quad \frac{Z_c}{Z_t} = j\omega C'(1+j)\sqrt{\frac{\omega L'}{2G'}} = (-1+j)C'\sqrt{\frac{\omega^3 L'}{2G'}}$$

Dans le plan Z_t/Z_c on parcourt une droite à 45°, du point à l'infini pour $\omega = 0$ jusqu'à l'origine pour $\omega = \infty$. La transformée de cette droite dans le plan de ρ est un cercle qui passe par les deux points $\rho_t = \pm 1$ et dont la tangente fait un angle de $\pm 45^\circ$ aux deux extrémités:



La valeur maximale prise par le facteur de réflexion ρ_t est située au point le plus bas de la courbe, et vaut $1 + \sqrt{2}$, pour une pulsation $\omega = \sqrt[3]{\frac{G'}{L'C'^2}}$

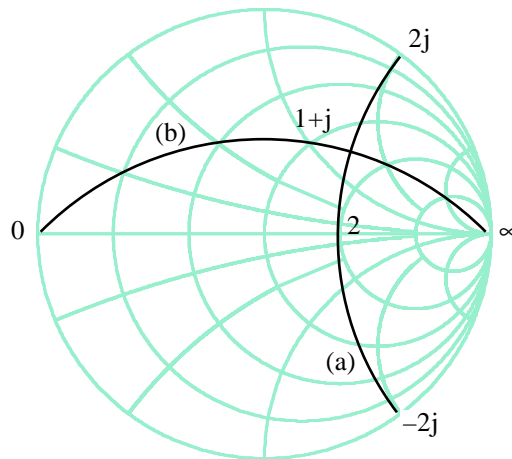
On constate que le module de ρ_t est toujours supérieur à l'unité, le cercle étant situé en dehors de l'abaque Ceci peut à première vue paraître paradoxal, vu qu'on a une terminaison passive à l'extrémité d'une ligne passive... Il faut toutefois constater que $|\rho_t|^2$ ne correspond à la puissance réfléchie que dans le cas d'une ligne sans pertes. Le calcul de la puissance sur la ligne considérée ici montre qu'elle est purement imaginaire (réactive).

Problème 4.2 Déterminer dans l'abaque de Smith le lieu des points pour lesquels:

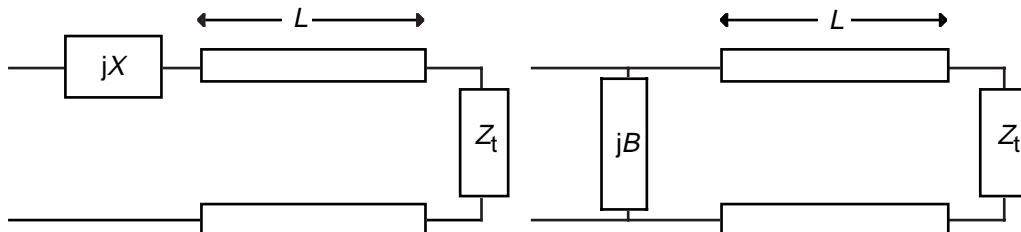
a) $|\underline{Z}/\underline{Z}_c| = 2$ b) $\arg(\underline{Z}/\underline{Z}_c) = 45^\circ$

sur quels types de courbes se trouvent ces familles de points ?

Dans le plan $|\underline{Z}/\underline{Z}_c|$, la courbe a) est un cercle de rayon 2, la courbe b) une droite à 45° . Leurs transformées sont toutes deux des cercles, passant par les points $2j$, 2 et $-2j$ pour a), par 0 , $x(1+j)$ et ∞ dans le second (x variant de 0 à ∞).



Problème 4.3 Une terminaison ayant une impédance de $\underline{Z}_t = 10 + j10 \Omega$ est connectée à une ligne d'impédance caractéristique $\underline{Z}_c = 50 \Omega$. On veut l'adapter, au moyen d'un segment de ligne de transmission et d'un élément réactif connecté en série ou en parallèle. On veut que le dispositif d'adaptation soit le plus court possible.



On peut résoudre le problème analytiquement, en partant de la relation pour l'impédance d'entrée, qui donne la condition d'adaptation :

$$Z_c + jX = Z_c \frac{R_L + jX_L + jZ_c \tan \beta L}{Z_c + j(R_L + jX_L) \tan \beta L}$$

On identifie la partie réelle du terme de gauche avec la partie réelle de l'expression de droite, ce qui permet de trouver une relation pour la longueur électrique βL :

$$\tan \beta L = \frac{X_L Z_c \pm \sqrt{X_L Z_c (R_L - Z_c)^2 + X_L^2}}{|\underline{Z}_L|^2 - R_L Z_c}$$

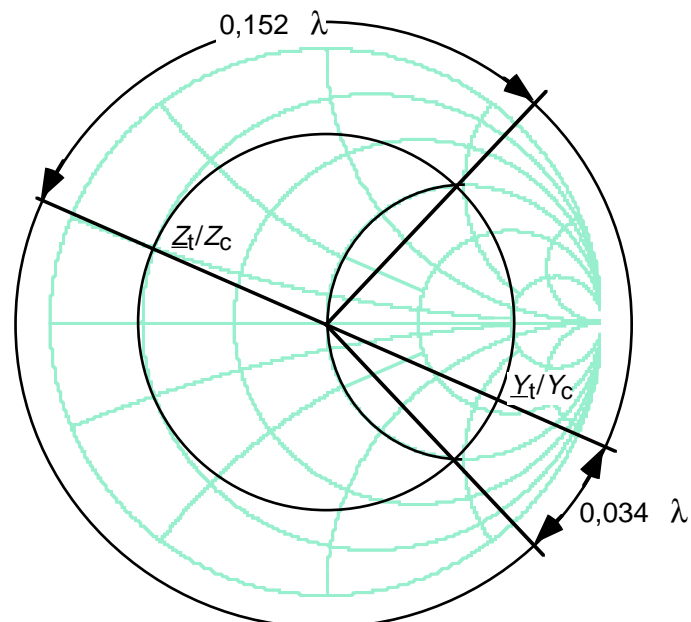
Cette valeur est alors introduite dans l'expression au-dessus, donnant la partie imaginaire X , qui est, au signe près, la réactance qu'il s'agit de connecter (on n'explique pas ici cette relation, pour des raisons évidentes). On procède de façon similaire pour la susceptance en parallèle.

Les calculs devenant fastidieux, un logiciel pour PC a été mis au point (F. Gardiol, LOSLIN, Lossy Line Calculations Software and User's Manual, Artech House, Boston - London, 1989). L'application du programme RM (Reactive Matching) donne directement :

MATCHING WITH	length of transmission line	reactance
SERIES INDUCTANCE	.2831 length units	91.2 ohms
SERIES CAPACITANCE	.1516 length units	-91.2 ohms
SHUNT INDUCTANCE	.4016 length units	-27.12 ohms
SHUNT CAPACITANCE	.0331 length units	27.12 ohms

Résolution graphique sur l'abaque de Smith

Le rapport Z_L/Z_C vaut $0,2+j0,2$. On trouve le point correspondant dans l'abaque, et on trace le cercle centré sur le centre de l'abaque et qui passe par ce point. Les intersections avec le cercle $R_t/Z_C = 1$ permettent de déterminer les longueurs des lignes qu'il faut introduire. Il faut connecter soit une réactance inductive de 90Ω à une distance de $0,284 \lambda$, soit une réactance capacitive de -90Ω à une distance de $0,152 \lambda$.



Pour l'adaptation avec une susceptance en parallèle, on part du point symétrique sur l'abaque. Dans ce cas, on connecte soit une réactance inductive de $27,77... \Omega$ à $0,402 \lambda$, soit une réactance capacitive de $-27,77... \Omega$ à $0,034 \lambda$ de la charge (note : la réactance est l'inverse de la susceptance, qui vaut ici $\pm 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ S}$). On note que les réactances n'ont pas les mêmes valeurs que dans l'adaptation en série !! La capacité connectée en parallèle donne la ligne la plus courte.

5ème série de problèmes: LIGNES DE TRANSMISSION

Problème 5.1 *Un tronçon de câble coaxial de 40 centimètres de long est terminé par des court-circuits à ses deux extrémités, formant un résonateur. Déterminer les fréquences de résonance, lorsque le matériau isolant qui remplit le câble a la permittivité suivante:*

- a) $\epsilon_r = 1$ (air) b) $\epsilon_r = 4$ c) $\epsilon_r = 620$

Les fréquences de résonance sont toutes données par $f_n = \frac{nc}{2d} = \frac{nc_0}{2d\sqrt{\epsilon_r}}$, où n est un entier différent de zéro. Pour les situations indiquées, on obtient

- a) $f_n = n \text{ 375 MHz}$ b) $f_n = n \text{ 187,5 MHz}$ c) $f_n = n \text{ 15,06 MHz}$

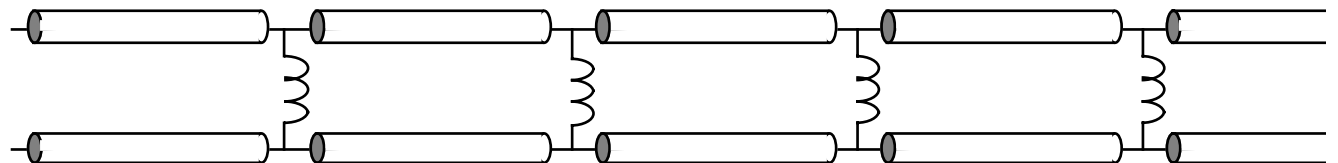
Que se passe-t-il si le câble est terminé à une extrémité par un court-circuit et qu'il est ouvert à son autre extrémité ?

Les conditions à satisfaire sont alors $U(0) = 0$ et $I(d) = 0$, on a ainsi $U_+ + U_- = 0$, et donc $U_+ = -U_-$. Remplaçant dans la seconde condition, on obtient $\exp(-j\beta d) + \exp(+j\beta d) = 0$, c'est-à-dire $2\cos\beta d = 0$, condition qui est satisfaite lorsque $\beta d = \pi/2 + n\pi$. Les fréquences de résonance sont dans ce cas $f_n = \frac{c}{4d}(2n-1) = \frac{nc_0}{4d\sqrt{\epsilon_r}}(2n-1)$

on trouve ainsi (toutes les valeurs en MHz):

- a) $f_n = 187,5 + (n-1) \text{ 375}$ b) $f_n = 93,75 + (n-1) \text{ 187,5}$ c) $f_n = 7,53 + (n-1) \text{ 15,06 MHz}$

Problème 5.2 *Une ligne de transmission sans pertes, avec une impédance caractéristique de $Z_c = 50 \Omega$ et une vitesse de propagation c_0 (ligne à air) est chargée de façon périodique par des inductances de $10 \mu\text{H}$ connectées en parallèle tous les 50 centimètres le long de la ligne. Déterminer, dans le cas asymptotique (Floquet) quelles seront les bandes passantes et les bandes bloquées. Déterminer l'affaiblissement maximum produit par une cellule dans la première bande bloquée.*



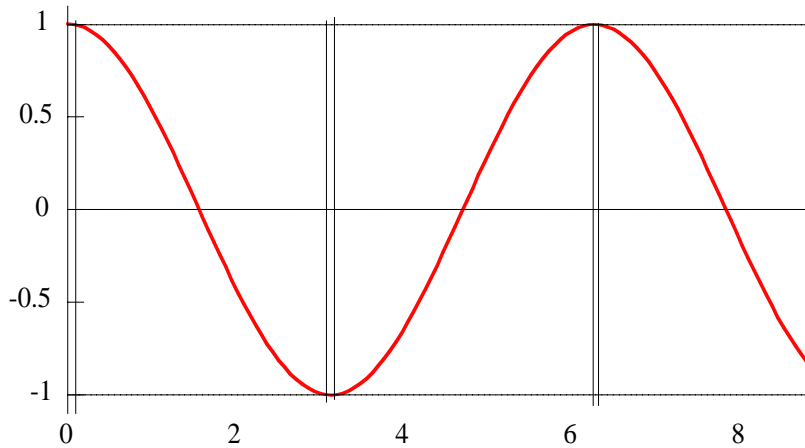
La relation pour la propagation sur la ligne chargée périodiquement est:

$$\cosh(\gamma_p d) = \cos(\beta d) - \frac{B Z_c}{2} \sin(\beta d)$$

Lorsque le module de cette expression est plus grand que 1, il y a affaiblissement et on est dans une bande bloquée. Lorsqu'il est inférieur à 1, il y a propagation et on est dans une bande passante. Il faut donc déterminer les fréquences qui correspondent aux passages par ± 1 . On a ici $\beta d = \omega d / c_0 = (\omega/6) 10^{-8} = F$ (fréquence normalisée). On trouve ensuite que

$$\frac{B Z_c}{2} = -\frac{Z_c}{2\omega L} = -\frac{50}{2\omega \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = -\frac{2,5 \cdot 10^6}{\omega} = -\frac{1}{240 F}$$

La fonction qu'il faut considérer est $\cosh(\alpha_p d) = \cos(F) + \frac{\sin(F)}{240 F}$, représentée dans la figure



La relation admet des solutions “simples”, $F = \beta d = n\pi$, qui donnent $f = n \cdot 600$ MHz (limites inférieures des bandes bloquées), et des solutions moins immédiates, qui nécessitent la recherche des racines de la fonction. On trouve ainsi les limites supérieures des bandes bloquées à $f = 8,7142; 300,253; 600,127; \text{ MHz}$. Les bandes bloquées sont ici très étroites.

Le maximum d'affaiblissement dans la première bande bloquée se situe à la fréquence nulle et correspond à $\cosh(\alpha_p d) = 1 + \frac{1}{240} = 1,00417$ et on en tire $\alpha_p d = 0,0912 \text{ Np}$.

6ème série de problèmes: ONDE PLANE ET POLARISATION

Problème 6.1 *Soit le champ électrique*

$$\mathbf{E}(t, z) = \sqrt{2} E_0 [\mathbf{e}_x \sin(\omega t - \beta z + \pi/6) + \mathbf{e}_y \sin(\omega t - \beta z)]$$

6.1.1 Déterminer le champ magnétique $\mathbf{H}(t, z)$ qui lui correspond dans un milieu sans pertes où $\varepsilon = \varepsilon_0$ et $\mu = \mu_0$

On constate que le champ électrique ne dépend que de la coordonnée z , et qu'il possède deux composantes selon x et y . Son rotationnel prend donc la forme suivante :

$$\nabla \times \mathbf{E}(t, z) = -\mathbf{e}_x \frac{\partial E_y}{\partial z} + \mathbf{e}_y \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}(t, z)}{\partial t} = \sqrt{2} \beta E_0 [\mathbf{e}_x \cos(\omega t - \beta z) - \mathbf{e}_y \cos(\omega t - \beta z + \pi/6)]$$

on en tire la dérivée par rapport au temps de $\mathbf{H}(t, z)$, que l'on intègre:

$$\mathbf{H}(t, z) = \frac{\sqrt{2} \beta E_0}{\omega \mu_0} [-\mathbf{e}_x \sin(\omega t - \beta z) + \mathbf{e}_y \sin(\omega t - \beta z + \pi/6)]$$

Lors de l'intégration par rapport au temps, on doit en principe ajouter une "constante" d'intégration, qui est plutôt ici une fonction arbitraire indépendante du temps. Comme une telle fonction (à fréquence nulle) ne présente aucun rapport avec l'onde électromagnétique que l'on considère ici, on doit la poser égale à zéro.

Faisant usage d'une autre équation de Maxwell, on prend le rotationnel de $\mathbf{H}(t, z)$ et on le compare à la dérivée par rapport au temps de $\mathbf{E}(t, z)$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}(t, z) &= \frac{\sqrt{2} \beta^2 E_0}{\omega \mu_0} [\mathbf{e}_x \cos(\omega t - \beta z + \pi/6) + \mathbf{e}_y \cos(\omega t - \beta z)] \\ &= \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(t, z)}{\partial t} = \sqrt{2} \omega \varepsilon_0 E_0 [\mathbf{e}_x \cos(\omega t - \beta z + \pi/6) + \mathbf{e}_y \cos(\omega t - \beta z)] \end{aligned}$$

on identifie ces deux relations, ce qui entraîne que $(\omega/\beta)^2 = 1/\varepsilon_0 \mu_0 = c_0^2$, où c_0 est la vitesse de la lumière dans le vide. On peut finalement exprimer le champ magnétique sous la forme :

$$\mathbf{H}(t, z) = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0 [-\mathbf{e}_x \sin(\omega t - \beta z) + \mathbf{e}_y \sin(\omega t - \beta z + \pi/6)]$$

Le champ magnétique est toujours perpendiculaire au champ électrique, car $\mathbf{E}(t, z) \cdot \mathbf{H}(t, z) = 0$. Leurs amplitudes sont liées par le facteur $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \cong 120 \pi = 376,6 \Omega$.

6.1.2. Trouver les vecteurs phaseurs correspondants $\underline{\mathbf{E}}(z)$ et $\underline{\mathbf{H}}(z)$.

On pourrait trouver le vecteur phaseur par la relation

$$\underline{\mathbf{E}}(z) = \mathbf{E}_r(z) + j\mathbf{E}_i(z) = [\mathbf{E}(0, z) + j\mathbf{E}(T/4, z)]/\sqrt{2}$$

Dans ce but, on déterminerait la direction et l'amplitude du champ en $t = 0$, puis en $t = T/4$, puis on remplacerait dans la relation et on regrouperait les termes communs. Cela serait tout à fait correct, mais inutilement compliqué, du fait qu'on peut voir "tout de suite" (ou presque) que :

$$\sin(\omega t - \beta z + \pi/6) = \operatorname{Re}[-j e^{j(\omega t - \beta z + \pi/6)}] = \operatorname{Re}[e^{j(\omega t - \beta z + \pi/6 - \pi/2)}]$$

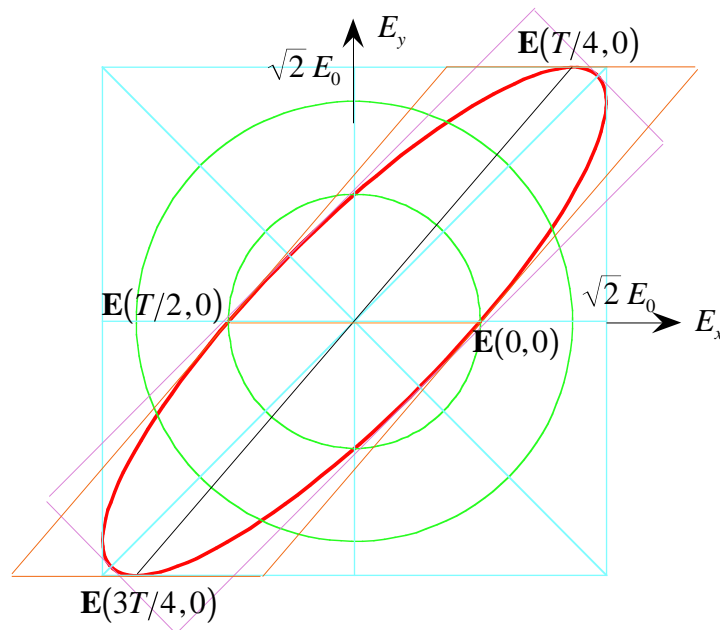
On peut alors écrire :

$$\underline{\mathbf{E}}(z) = E_0 e^{-j\beta z} [\mathbf{e}_x e^{-j\pi/3} + \mathbf{e}_y e^{-j\pi/2}] \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{H}}(z) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 e^{-j\beta z} [-\mathbf{e}_x e^{-j\pi/2} + \mathbf{e}_y e^{-j\pi/3}]$$

Remarque: en faisant la transformation en grandeurs complexes, il faut se rappeler qu'on a choisi une dépendance en $e^{j\omega t}$ (et non pas en $e^{-j\omega t}$).

6.1.3 *Montrer que, dans le plan $z = 0$, le champ électrique a une polarisation elliptique, et dessiner l'ellipse décrite, en fonction du temps, par l'extrémité du champ.*

On constate que les deux composantes selon x et selon y ne sont pas en phase: la polarisation n'est donc pas linéaire. On constate que ces deux composantes ont la même amplitude, mais ne sont pas en quadrature: la polarisation n'est pas circulaire. On a une ellipse inscrite dans un carré.



On construit l'ellipse en traçant les flèches correspondant au champ en $t = 0$, puis en $t = T/4$, qui nous donnent deux demi-axes conjugués de l'ellipse. Ces lignes permettent de tracer le losange dans lequel l'ellipse est inscrite.

6.1.4. *Trouver les axes principaux de l'ellipse de polarisation (longueur et direction). Suggestion : chercher les instants du temps pour lesquels le module du champ électrique est soit maximum (demi grand axe), soit minimum (demi petit axe).*

Lorsque le champ électrique est maximum, la dérivée de son module par rapport au temps s'annule. Il en va de même pour la dérivée du module carré du champ, ou encore celle de l'énergie électrique, donnée par

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \frac{\epsilon_0}{2} (E_x^2 + E_y^2) = E_0^2 \left[\sin^2\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2(\omega t) \right]$$

On dérive cette expression, et on annule sa dérivée par rapport au temps:

$$\omega E_0^2 \left[2 \sin\left(\omega t_m + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\omega t_m + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \sin(\omega t_m) \cos(\omega t_m) \right] = \omega E_0^2 \left[\sin\left(2\omega t_m + \frac{\pi}{3}\right) + \sin(2\omega t_m) \right] = 0$$

On constate, après quelques calculs, que les extremas apparaissent lorsque

$$\sin\left(2\omega t_m + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \quad \text{ce qui entraîne que} \quad t_m = \frac{1}{2\omega}\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = \frac{T}{4}\left(-\frac{1}{6} + k\right)$$

Le demi petit axe correspond au cas $k = 0$:

$$\mathbf{E}(t_m, z) = \sqrt{2} E_0 \left[\mathbf{e}_x \sin\left(-\pi/12 + \pi/6\right) + \mathbf{e}_y \sin\left(-\pi/12\right) \right] = 0,259 \sqrt{2} E_0 \left[\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \right] = 0,366 E_0 \left[\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \right]$$

Le demi grand axe est similairement donné par $k = 1$:

$$\mathbf{E}(t_M, z) = \sqrt{2} E_0 \left[\mathbf{e}_x \sin\left(5\pi/12 + \pi/6\right) + \mathbf{e}_y \sin\left(5\pi/12\right) \right] = 0,966 \sqrt{2} E_0 \left[\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \right] = 1,366 E_0 \left[\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \right]$$

Comme les deux composantes ont la même amplitude, les deux axes principaux de l'ellipse sont les deux diagonales d'un carré (droites à $\pm 45^\circ$).

6.1.5. Décomposer le champ électrique en deux composantes :

6.1.5a. toutes deux linéairement polarisées, et perpendiculaires l'une à l'autre (dans l'espace).

Il suffit de découper le champ en une composante selon x et une selon y :

$$\mathbf{E}_1(t, z) = \sqrt{2} E_0 \mathbf{e}_x \sin(\omega t - \beta z + \pi/6) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_2(t, z) = \sqrt{2} E_0 \mathbf{e}_y \sin(\omega t - \beta z)$$

On peut en fait choisir deux paires d'axes perpendiculaires quelconques.

6.1.5b. toutes deux linéairement polarisées, mais déphasées de 90° (dans le temps).

Dans ce cas, on développe le sinus d'une somme de la manière suivante:

$$\mathbf{E}(t, z) = \sqrt{2} E_0 \left[\mathbf{e}_x \cos(\omega t - \beta z) \sin(\pi/6) + \mathbf{e}_x \sin(\omega t - \beta z) \cos(\pi/6) + \mathbf{e}_y \sin(\omega t - \beta z) \right]$$

On regroupe ensuite, d'une part les termes en cosinus, de l'autre ceux en sinus :

$$\mathbf{E}_1(t, z) = \sqrt{2} E_0 \mathbf{e}_x \cos(\omega t - \beta z) \sin(\pi/6) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_2(t, z) = \sqrt{2} E_0 \sin(\omega t - \beta z) \left[\mathbf{e}_x \cos(\pi/6) + \mathbf{e}_y \right]$$

On pourrait similairement développer sur la base d'autres origines du temps avant de séparer, et obtenir des termes en $\cos(\omega t + \phi)$ et en $\sin(\omega t + \phi)$, avec ϕ quelconque.

6.1.5c. toutes deux linéairement polarisées, simultanément perpendiculaires et déphasées de 90° . Cette condition n'est satisfaite que lorsqu'on choisit comme base les axes principaux de l'ellipse de polarisation. On obtient ainsi, en faisant usage des valeurs obtenues sous 6.1.4:

$$\mathbf{E}_1(t, z) = 1,366 E_0 \left[\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \right] \sin(\omega t - \beta z + \pi/12) \quad \mathbf{E}_2(t, z) = 0,366 E_0 \left[\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \right] \cos(\omega t - \beta z + \pi/12)$$

6.1.5d. circulairement polarisées en sens opposé: sachant que le demi grand axe est la somme des rayons des deux cercles de polarisation et le demi petit axe sa différence, on trouve les deux polarisations circulaires en faisant la demi somme et la demi différence des deux ondes trouvées sous 6.1.5c:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(t, z) &= 0,866 E_0 \left\{ \left[\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \right] \sin(\omega t - \beta z + \pi/12) + \left[\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \right] \cos(\omega t - \beta z + \pi/12) \right\} \\ &= 1,225 E_0 \left\{ \mathbf{e}_x \sin(\omega t - \beta z + \pi/3) - \mathbf{e}_y \cos(\omega t - \beta z + \pi/3) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2(t, z) &= 0,5E_0 \left\{ [\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y] \sin(\omega t - \beta z + \pi/12) - [\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y] \cos(\omega t - \beta z + \pi/12) \right\} \\ &= 0,707E_0 \left\{ -\mathbf{e}_x \cos(\omega t - \beta z + \pi/3) + \mathbf{e}_y \sin(\omega t - \beta z + \pi/3) \right\} \end{aligned}$$

On peut vérifier que leur somme donne bien le champ électrique total. On peut également vérifier que la somme des 2 rayons donne bien le demi-grand angle de l'ellipse, et leur différence le demi-petit angle.

6.1.6. *Que devient l'ellipse de polarisation lorsque $z \neq 0$?*

Elle ne change pas : une variation de z est équivalente à une variation de $\omega t / \beta = c_0 t$, le point correspondant parcourt donc bien la même ellipse.

6.1.7. *Quelle est la polarisation du champ magnétique ?*

On a précédemment constaté, sous 1) que le champ magnétique est toujours perpendiculaire au champ électrique. Il est aussi dans le plan x - y . On a donc également une ellipse, disposée perpendiculairement à celle décrite par le champ électrique.

Problème 6.2 *Déterminer la signification, en termes des champs, des quatre conditions suivantes (dans chaque cas $\underline{\mathbf{E}} \neq 0$):*

$$6.2.1 \quad \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{E}} = 0 = (\mathbf{E}_r + j\mathbf{E}_i) \cdot (\mathbf{E}_r + j\mathbf{E}_i) = \mathbf{E}_r^2 - \mathbf{E}_i^2 + 2j\mathbf{E}_r \cdot \mathbf{E}_i$$

La partie réelle et la partie imaginaire de cette expression sont nulles, ce qui entraîne que

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_r \cdot \mathbf{E}_i = 0$$

La partie réelle est égale à la partie imaginaire, et les deux sont perpendiculaire: c'est la condition pour laquelle on a une **polarisation circulaire**.

$$6.2.2 \quad \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{E}}^* = 0 = (\mathbf{E}_r + j\mathbf{E}_i) \cdot (\mathbf{E}_r - j\mathbf{E}_i) = \mathbf{E}_r^2 + \mathbf{E}_i^2$$

Lorsque la somme de deux carrés est nulle, chacun des termes est nul. On a ici $\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_i = 0$, ce qui n'est pas compatible avec la donnée $\underline{\mathbf{E}} \neq 0$.

$$6.2.3 \quad \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{E}} = 0 = (\mathbf{E}_r + j\mathbf{E}_i) \times (\mathbf{E}_r + j\mathbf{E}_i) = \mathbf{E}_r \times \mathbf{E}_r + \mathbf{E}_i \times \mathbf{E}_i + j(\mathbf{E}_r \times \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_i \times \mathbf{E}_r) \equiv 0$$

Le produit vectoriel d'un vecteur par lui-même est toujours nul, et en intervertissant l'ordre des termes dans un produit vectoriel on en change le signe: cette expression est donc toujours identiquement nulle. La relation est toujours satisfaite et ne donne aucune information quant aux propriétés du vecteur-phaseur $\underline{\mathbf{E}}$.

$$6.2.4 \quad \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{E}}^* = 0 = (\mathbf{E}_r + j\mathbf{E}_i) \times (\mathbf{E}_r - j\mathbf{E}_i) = -2j\mathbf{E}_r \times \mathbf{E}_i$$

La partie réelle et la partie imaginaire sont parallèles, ou encore l'une des deux est nulle: ces situations correspondent à une **polarisation linéaire**.

7ème série de problèmes: RÉFLEXION D'UNE ONDE PLANE

Problème 7.1: deux milieux sans pertes

Une onde électromagnétique, dont le champ électrique est donné par son vecteur-phaseur :

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = E_0 \mathbf{e}_x^{-j\beta(y+z)}$$

tombe sur un plan situé en $z = 0$ séparant deux milieux diélectriques, non-magnétiques, sans pertes, ayant des permittivités :

$$\epsilon_1 = 2,5\epsilon_0 \quad \text{pour } z < 0 \quad \text{et} \quad \epsilon_2 = 1,5\epsilon_0 \quad \text{pour } z > 0$$

- déterminer la polarisation intrinsèque de l'onde (circulaire, etc), et sa polarisation par rapport au plan d'incidence (parallèle ou perpendiculaire).
- trouver les angles d'incidence, de réflexion et de transmission.
- déterminer les facteurs de réflexion et de transmission.

a) comme le champ est toujours dirigé dans la même direction, selon x , la polarisation intrinsèque de l'onde est **linéaire** (il n'est pas nécessaire d'utiliser de formule pour le voir).

Note : intrinsèque signifie "intérieur à l'objet dont il s'agit, qui appartient à son essence". Il s'agit ici d'une propriété propre de l'onde, indépendante du système de coordonnées ou de la présence de surfaces de séparation.

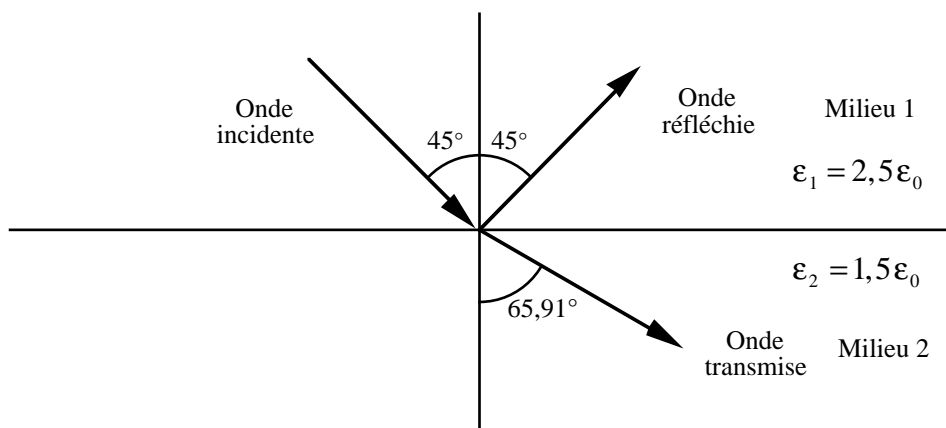
Le plan d'incidence contient la normale à la surface de séparation, soit \mathbf{e}_z et le phaseur de propagation, que l'on obtient en considérant l'exposant de e dans la formulation du champ:

$$\underline{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \mathbf{r} = \underline{\gamma}_x x + \underline{\gamma}_y y + \underline{\gamma}_z z = j\beta(y+z) \quad \text{et donc} \quad \underline{\boldsymbol{\gamma}} = j\beta(\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z)$$

Le plan d'incidence est donc le plan y - z . Le champ électrique, dirigé selon x , lui est toujours perpendiculaire, on a donc une **polarisation perpendiculaire**.

b) La direction de propagation de l'onde incidente est ici selon $\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z$. L'angle d'incidence est donc de 45° . L'angle de réflexion, selon la loi de Snell, vaut également 45° . On trouve l'angle de transmission au moyen de la relation

$$\theta_\beta = \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \theta_{\text{in}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1,5}{2,5}}} \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arcsin(0,9129) = 65,91^\circ$$



c) On trouve le facteur de réflexion avec la relation pour la polarisation perpendiculaire. Comme les deux milieux sont non-magnétiques, les termes μ se simplifient et on obtient.

$$\rho_{\perp} = \frac{\cos \theta_{in} - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_{in}}}{\cos \theta_{in} + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_{in}}} = \frac{0,7071 - \sqrt{0,6 - 0,5}}{0,7071 + \sqrt{0,6 - 0,5}} = 0,382$$

et le facteur de transmission vaut alors $\tau_{\perp} = 1 + \rho_{\perp} = 1,382$. On remarque que ce facteur est plus grand que 1 ce qui, pour une polarisation perpendiculaire, est toujours le cas quand $n < 1$. On notera aussi que l'onde incidente provient du milieu à permittivité la plus grande et que, si l'angle d'incidence avait été légèrement plus grand, on aurait eu une réflexion totale.

Problème 7.2: réflexion produite par une surface métallique

Une onde électromagnétique, dont le champ électrique est donné par le vecteur-phaseur $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = E_0 \mathbf{e}_x e^{-j\beta z}$ tombe sur un plan situé en $z = 0$ séparant l'air ($z < 0$) d'une plaque d'aluminium ($z > 0$) pour lequel $\sigma = 38'160'000 \text{ S/m}$ ($\sigma \gg \omega\epsilon$ mais $\neq \infty$). La fréquence du signal est de 25 MHz. Trouver :

- l'indice de réfraction complexe \underline{n}*
- les facteurs de réflexion et de transmission*
- les champs électrique et magnétique en tout point de l'espace.*
- le vecteur de Poynting dans l'air et dans le métal*
- la densité de courant à l'intérieur du conducteur.*

On a ici une incidence normale : il n'est pas possible de définir un plan d'incidence, et de ce fait les polarisations perpendiculaires et parallèles sont confondues.

a) l'indice de réfraction complexe air-métal est donné par $\underline{n}^2 \cong \frac{-j\sigma}{\omega\epsilon_0} \gg 1$

ce qui donne, pour de l'aluminium à 25 MHz:

$$\underline{n}^2 \cong \frac{-j 38,16 \cdot 10^6}{2\pi \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}} = -j 2,744 \cdot 10^{10} \quad \text{et donc} \quad \underline{n} \cong (1 - j) 1,17 \cdot 10^5$$

b) les facteurs de réflexion et de transmission sont donnés respectivement par

$$\underline{\rho} = \frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}} = \frac{\frac{1}{\underline{n}} - 1}{\frac{1}{\underline{n}} + 1} \cong -1 + \frac{2}{\underline{n}} = -1 + (1 + j) 4,27 \cdot 10^{-6} \quad \underline{\tau} = \frac{2}{1 + \underline{n}} \cong \frac{2}{\underline{n}} = (1 + j) 4,27 \cdot 10^{-6}$$

c) le champ électrique vaut alors :

$$\text{dans l'air : } \underline{\mathbf{E}} = E_0 \mathbf{e}_x \left[e^{-j\beta z} - \left(1 - \frac{2}{\underline{n}}\right) e^{j\beta z} \right] = E_0 \mathbf{e}_x \left[-2j \left(1 - \frac{1}{\underline{n}}\right) \sin \beta z + \frac{2}{\underline{n}} \cos \beta z \right]$$

$$\text{dans le métal : } \underline{\mathbf{E}} = E_0 \frac{2}{\underline{n}} \mathbf{e}_x e^{-(\alpha_m + j\beta_m)z} \quad \text{avec} \quad \alpha_m + j\beta_m = \sqrt{j\omega\mu_0\sigma}$$

Pour chacune des trois ondes, le champ magnétique est donné par la relation $\underline{\mathbf{H}} = \frac{\underline{\boldsymbol{\gamma}} \times \underline{\mathbf{E}}}{j\omega\mu_0}$

Cette relation doit être appliquée séparément à chacune des ondes, du fait que pour chaque onde la valeur de $\underline{\boldsymbol{\gamma}}$ est différente !!

Après quelques calculs, on trouve le champ magnétique :

$$\text{dans l'air : } \underline{\mathbf{H}} = \frac{E_0}{Z_0} \mathbf{e}_y \left[e^{-j\beta z} + \left(1 - \frac{2}{\underline{n}}\right) e^{j\beta z} \right] = \frac{E_0}{Z_0} \mathbf{e}_y \left[2 \left(1 - \frac{1}{\underline{n}}\right) \cos \beta z - \frac{2j}{\underline{n}} \sin \beta z \right]$$

$$\text{dans le métal : } \underline{\mathbf{H}} = \frac{E_0}{Z_m} \frac{2}{\underline{n}} \mathbf{e}_y e^{-(\alpha_m + j\beta_m)z}$$

$$\text{avec } Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cong 120 \pi \Omega \quad \text{et} \quad Z_m = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\sigma}} = \frac{Z_0}{\underline{n}} = (1 + j) 2,61 \cdot 10^{-4} \Omega$$

On peut vérifier que le champ magnétique est approximativement continu en $z = 0$, au terme $1/\underline{n}$ près (ce terme est très petit, en général négligeable).

d) le vecteur de Poynting est obtenu par la relation $\underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*$ qui donne, dans l'air:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{S}} &= \frac{E_0^2}{Z_0} \mathbf{e}_z \left[e^{-j\beta z} - \left(1 - \frac{2}{\underline{n}}\right) e^{j\beta z} \right] \left[e^{j\beta z} + \left(1 - \frac{2}{\underline{n}^*}\right) e^{-j\beta z} \right] \\ &= \frac{E_0^2}{Z_0} \mathbf{e}_z \left[-2j \sin 2\beta z + \frac{4}{|\underline{n}|^2} \left((1 + j \sin 2\beta z) \operatorname{Re}(\underline{n}) - j \cos 2\beta z \operatorname{Im}(\underline{n}) - 1 \right) \right] \end{aligned}$$

et dans le métal:

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{E_0^2}{Z_m^*} \frac{4}{|\underline{n}|^2} \mathbf{e}_z e^{-2\alpha_m z}$$

e) la densité de courant à l'intérieur du conducteur est obtenue à l'aide du champ électrique :

$$\underline{\mathbf{J}} = \sigma \underline{\mathbf{E}} = E_0 \frac{2\sigma}{\underline{n}} \mathbf{e}_x e^{-(\alpha_m + j\beta_m)z}$$

Dans le métal, la décroissance du courant est très rapide, de sorte que celui-ci est surtout concentré au voisinage de la surface. On détermine le courant qui circule sur une tranche de conducteur d'une largeur unitaire (1 mètre) en intégrant sur toute l'épaisseur du métal:

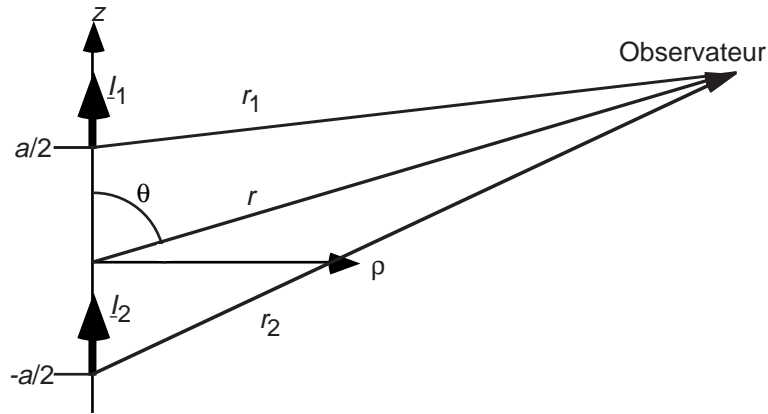
$$\underline{\mathbf{I}} = \int_0^\infty \underline{\mathbf{J}} dz = \int_0^\infty E_0 \frac{2\sigma}{\underline{n}} \mathbf{e}_x e^{-(\alpha_m + j\beta_m)z} dz = \frac{E_0}{\alpha_m + j\beta_m} \frac{2\sigma}{\underline{n}} \mathbf{e}_x = 2 \frac{E_0}{Z_0} \mathbf{e}_x$$

Dans le cas limite du conducteur électrique parfait (cep), $\underline{n} \rightarrow \infty$, et ce courant devient le courant de surface. Son amplitude est exactement celle du champ magnétique total au bord du conducteur, en $z = 0$, du côté air. Ceci correspond à la condition limite, du fait que pour des signaux variant dans le temps le champ magnétique est nul à l'intérieur d'un conducteur électrique parfait.

8ème série de problèmes: ANTENNES

Problème 8.1: Deux dipôles superposés

Déterminer le diagramme de rayonnement de deux dipôles simples alignés selon l'axe z et séparés par une distance a. Les deux courants sont de même amplitude et sont déphasés d'un angle ψ .



Ce problème présente une symétrie de révolution autour de l'axe des z : les champs ne dépendent pas de la coordonnée azimutale ϕ .

On a approximativement $\phi_1 = \phi_2 = \phi$, $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ et, pour le terme apparaissant au dénominateur de l'expression du champ du dipôle, $r_1 = r_2 = r$. Une approximation plus précise est nécessaire pour les termes de phase qui apparaissent dans l'exposant, et on trouve (plusieurs méthodes possibles) que :

$$r_1 \cong r - (a/2) \cos \theta \quad \text{et} \quad r_2 \cong r + (a/2) \cos \theta$$

Le champ électrique produit par l'ensemble des deux dipôles est alors donné par :

$$\underline{E}_\theta \cong j \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} I \frac{d\beta_0}{4\pi r} \sin \theta e^{-j\beta_0 r} (e^{+j\beta_0(a/2) \cos \theta} + e^{-j\beta_0(a/2) \cos \theta} e^{+j\psi})$$

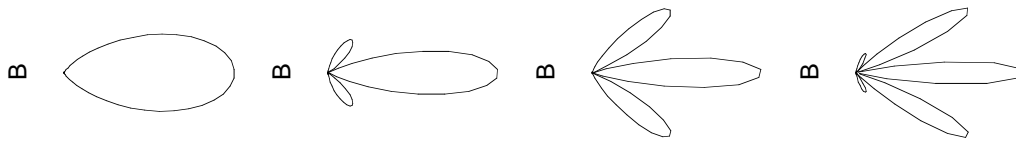
Cette expression prend la forme : $\underline{E}_\theta \cong j \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} I \frac{d\beta_0}{4\pi r} \sin \theta e^{-j\beta_0 r} e^{+j\psi/2} \cos \left(\beta_0 \frac{a}{2} \cos \theta - \frac{\psi}{2} \right)$

Le vecteur de Poynting est alors donné par :

$$\begin{aligned} S_r &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |\underline{E}_\theta|^2 \cong \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} |I|^2 \left(\frac{d\beta_0}{4\pi r} \right)^2 \sin^2 \theta \cos^2 \left(\beta_0 \frac{a}{2} \cos \theta - \frac{\psi}{2} \right) \\ &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} |I|^2 \left(\frac{d\beta_0}{4\pi r} \right)^2 \sin^2 \theta [1 + \cos(\beta_0 a \cos \theta - \psi)] \end{aligned}$$

Pour déterminer l'allure du rayonnement, on peut programmer la dépendance en θ de cette relation et tracer la courbe avec un programme graphique.

Lorsque $\Psi = 0$



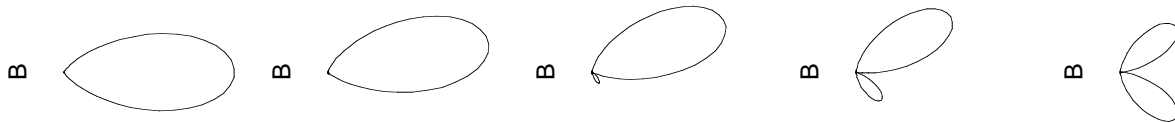
avec $\beta a = \pi$

$\beta a = 2\pi$

$\beta a = 3\pi$

$\beta a = 4\pi$

Et lorsque $\beta a = \pi$



et que $\Psi = 0$

$\Psi = \pi/4$

$\Psi = \pi/2$

$\Psi = 3\pi/4$

$\Psi = \pi$

On trouve les directions de rayonnement maximum et minimum en annulant la dérivée de S_r par rapport à θ , ce qui donne :

$$2 \sin \theta \cos \theta + 2 \sin \theta \cos \theta \cos(\beta_0 a \cos \theta - \psi) + \beta_0 a \sin^3 \theta \sin(\beta_0 a \cos \theta - \psi) = 0$$

$$\sin \theta [2 \cos \theta (1 + \cos(\beta_0 a \cos \theta - \psi)) + \beta_0 a \sin^2 \theta \sin(\beta_0 a \cos \theta - \psi)] = 0$$

On a des extremas soit pour $\sin \theta = 0$ (minima), soit pour $[] = 0$

Problème 8.2: Transmission spatiale

Le 25 août 1989, la sonde spatiale Voyager 2 a "frôlé" la planète Neptune, à une distance d'environ 4'500'000'000 kilomètres de la terre.

On suppose que (ordres de grandeur) :

- la puissance fournie par le générateur de la sonde est de 50 Watts

- le gain de l'antenne d'émission est de 1000 = G_1

- le gain de l'antenne de réception est de 60 dB et donc $G_2 = 10^6$

- la fréquence est de 4 GHz d'où la longueur d'onde $\lambda = 3 \cdot 10^8 / 4 \cdot 10^9 = 0,075$ m

Déterminer quelle est la puissance reçue par le récepteur sur la terre. Est-elle détectable?

Il suffit d'introduire les valeurs numériques dans la relation, ce qui donne:

$$P_r = P_f G_1 G_2 \left(\frac{\lambda}{4\pi L} \right)^2 = 50 \cdot 10^3 \cdot 10^6 \left(\frac{0,075}{4\pi \cdot 4,5 \cdot 10^{12}} \right)^2 = 8,795 \cdot 10^{-20} \text{ W}$$

Détail des calculs :

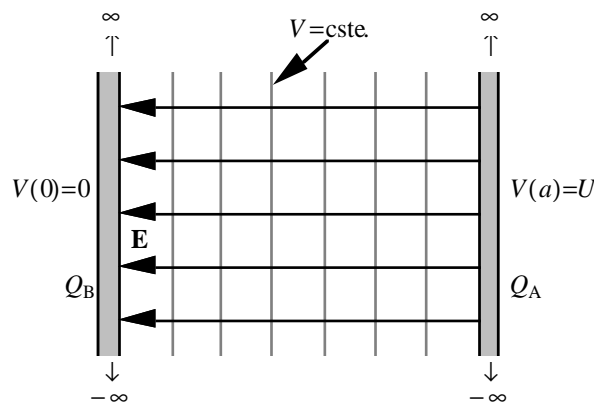
0.075 ÷ 4 =
.01875 ÷ 3.14159 =
.0059683154071664 ÷ 4.5E12 =
1.326292312E-15 xY 2 =
1.759051296E-30 * 50E9 =
8.79525648E-20 ◇

Il s'agit d'une puissance excessivement faible... Nous savons toutefois qu'elle est détectable, et notamment que des images photographiques de haute qualité de Neptune et de son satellite Triton ont été transmises lors de cette rencontre aux confins du Système Solaire.

ÉLECTROMAGNÉTISME

CORRIGÉS DES PROBLÈMES: Séries 9, 11, 14 et 15

Série 9: DEUX PLAQUES PARALLÈLES



Deux plaques métalliques parallèles, supposées parfaitement conductrices, sont placées dans les plans $x = 0$ et $x = a$ (voir figure). On impose un potentiel $V = 0$ sur la plaque de gauche, et $V = U$ sur celle de droite. Les deux plaques sont infinies dans la plan transverse – ce qui signifie que toutes les grandeurs ne dépendent que de la coordonnée x . On demande de

- déterminer et représenter graphiquement, en fonction de x , l'allure du potentiel $V(x)$ et du champ électrique $\mathbf{E}(x)$
- trouver où sont situées les équipotentielle $U/4, U/2, 3U/4$
- calculer les densités de charges de surface ρ_s sur les deux plaques

Problème 9.1 L'espace entre les deux plaques est rempli d'un matériau homogène de permittivité ϵ . La solution (équation de Laplace) se trouve au § 10.1.1 du cours.

Problème 9.2 L'espace entre les deux plaques est rempli d'un matériau inhomogène dont la permittivité est donnée par la relation $\epsilon(x) = \epsilon_1(1 + x/a)$. La solution se trouve au § 10.1.2 du cours, en posant $\epsilon_2 = \epsilon_1/a$.

Problème 9.3 L'espace entre les deux plaques est rempli d'un matériau homogène de permittivité ϵ mais contient aussi une densité de charges $\rho(x) = \epsilon U/a^2$.

L'équation de Poisson donne ici $\nabla^2 V(x) = \frac{d^2 V(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon} = -\frac{U}{a^2}$

On intègre deux fois $V(x) = -\frac{Ux^2}{2a^2} + Ax + B$, avec deux constantes déterminées aux bords

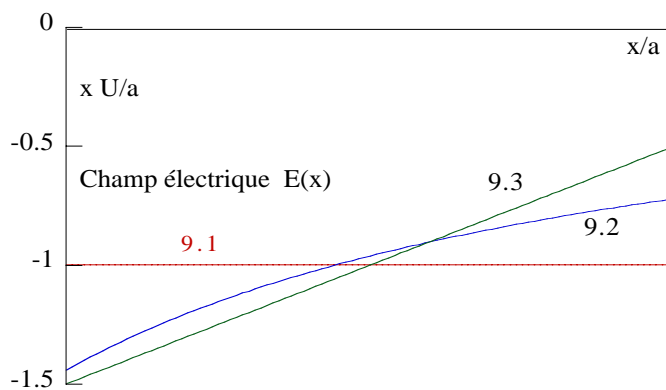
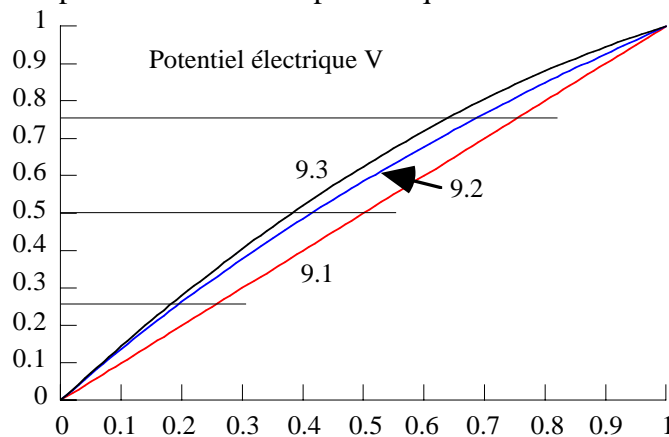
$V(0) = B = 0$ et $V(a) = -\frac{Ua^2}{2a^2} + Aa + B = U$, d'où l'on tire $A = \frac{3U}{2a}$ et le potentiel vaut

$V(x) = \frac{U}{2} \left(3\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2} \right)$ Le champ électrique est donné par $E_x(x) = -\nabla V(x) = \frac{U}{2a} \left(-3 + 2\frac{x}{a} \right)$

et les charges électriques sur les deux plaques sont $\rho_s(0) = -3\epsilon \frac{U}{2a}$ et $\rho_s(a) = \epsilon \frac{U}{2a}$.

La somme de toutes les charges est nulle: $\rho_s(0) + \int_0^a \rho(x) dx + \rho_s(a) = 0$.

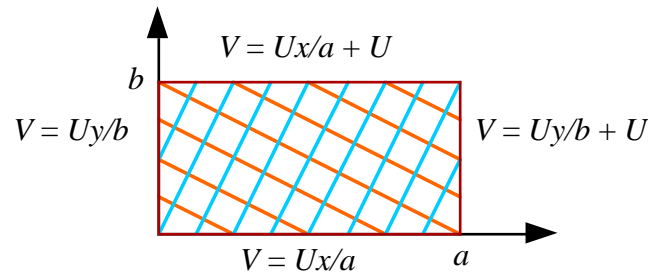
L'allure du potentiel et du champ électrique en fonction de x est donnée dans les deux figures



Les points aux potentiels	$U/4$	$U/4$	$3U/4$	sont situés en:	
9.1	$x/a =$	0,25	0,5	0,75	dans le cas homogène,
9.2	$x/a =$	0,189	0,414	0,681	dans le cas inhomogène,
9.3	$x/a =$	0,177	0,382	0,634	avec les charges d'espace.

11ème série de problèmes: SÉPARATION DE VARIABLES

Problème 11.1 Déterminer le potentiel V et le champ électrique \mathbf{E} dans le rectangle ci-dessous. Tracer les équipotentielles et les lignes de champ.



On détermine l'allure du potentiel sur les bords du rectangle, on constate qu'elle est continue avec une variation linéaire, et les solutions de l'équation de Laplace doivent donc être linéaires:

$$V(x, y) = (A_1x + A_2)(B_1y + B_2) = A_1B_1xy + A_1B_2x + A_2B_1y + A_2B_2$$

Appliquant les conditions aux limites sur les quatre côtés, on trouve que

$$A_1B_1 = 0 \quad A_1B_2 = U/a \quad A_2B_1 = U/b \quad A_2B_2 = 0 \quad \text{et donc}$$

$$V(x, y) = Ux/a + Uy/b$$

On remarque toutefois, si l'on cherche à déterminer les valeurs individuelles des quatre constantes, qu'on aboutit à une impossibilité. La solution est en fait la superposition de trois solutions

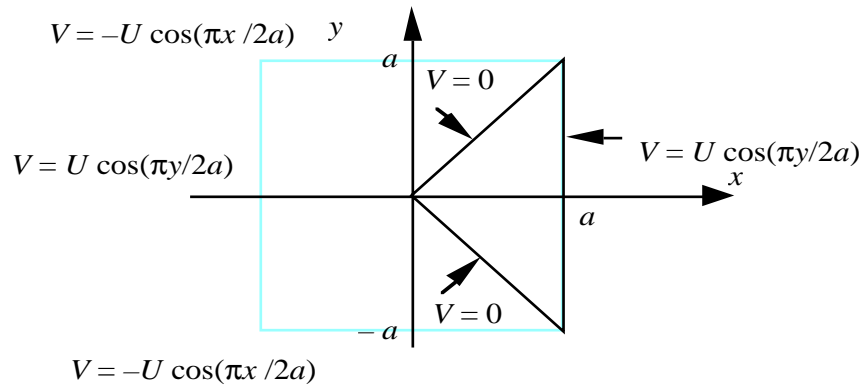
$$V(x, y) = U(x/a + 1)(y/b + 1) - Uxy/ab - U$$

Les équipotentielles sont alors les lignes $y = -(b/a)x + cste.$

On obtient le champ électrique en prenant le gradient $\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{U}{a}\mathbf{e}_x - \frac{U}{b}\mathbf{e}_y$

Les lignes de champ sont alors données par $\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y}$ qui donne $y = (a/b)x + cste.$

Problème 11.2 Déterminer le potentiel V et le champ électrique \mathbf{E} dans le triangle isocèle ci-dessous (utiliser autant que possible les résultats de problèmes traités précédemment).

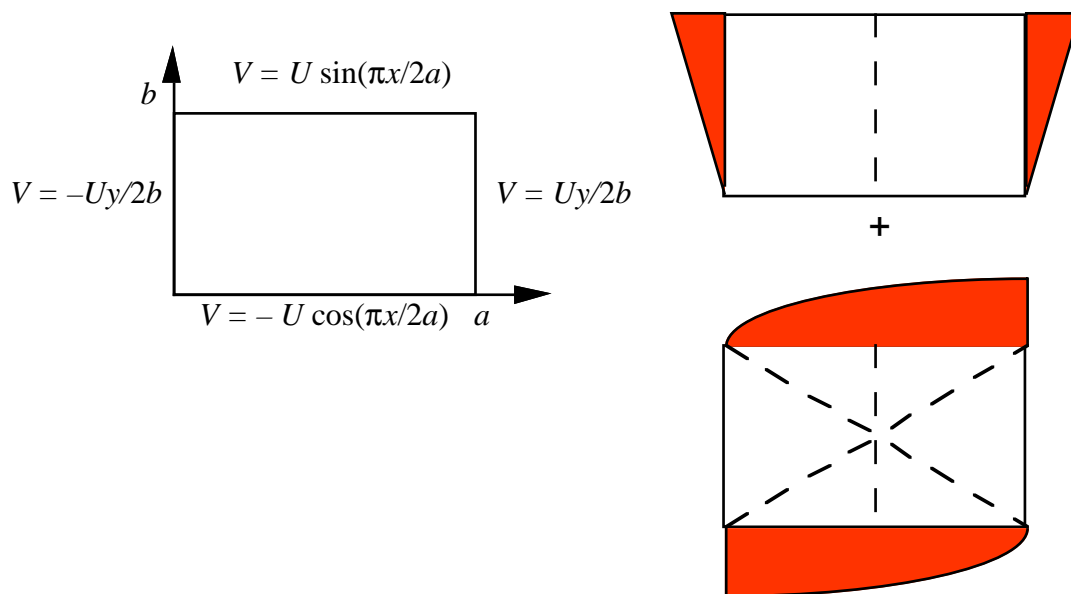


Vu la dépendance cosinusoidale du potentiel sur la paroi de droite, on cherche évidemment une solution en $\cos \cosh$ ou en $\cos \sinh$ comme au § 10.3.2, mais on constate qu'il n'est guère possible alors de satisfaire les conditions $V = 0$ en $y = \pm x$.

On constate que les lignes à 45° pourraient être considérées comme des axes de symétrie, et que le triangle est en fait le quart d'un carré. La solution est alors immédiate:

$$V(x, y) = \frac{U}{\cosh(\pi/2)} \left[\cosh \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2a} - \cos \frac{\pi x}{2a} \cosh \frac{\pi y}{2a} \right]$$

Problème 11.3 Déterminer le potentiel V au centre du rectangle ci-dessous.



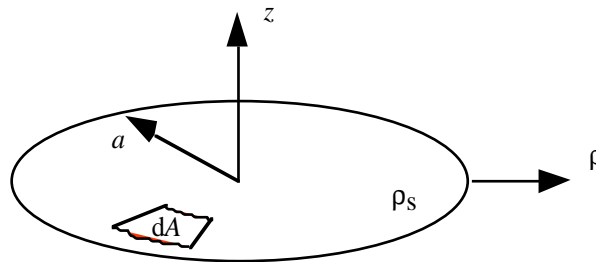
Il faut bien noter ici qu'on demande de trouver le potentiel seulement au centre du rectangle. On considère les conditions aux limites pour les deux cas suivants:

- ✱ parois de gauche et de droite, potentiels nuls ailleurs: les potentiels sont de signe opposé, par symétrie le potentiel correspondant est nul sur la ligne médiane,
- ✱ parois du haut et du bas, potentiels nuls ailleurs: les potentiels présentent une antisymétrie par rapport au centre du rectangle, où le potentiel doit être nul.

Superposant les potentiels obtenus dans les deux cas, on trouve que le potentiel au centre est nul. Il serait en revanche très compliqué de trouver le potentiel en tout point de la structure du fait des discontinuités aux sommets: la solution exacte contient des séries infinies. Mais ce n'est pas ce qui est demandé dans ce problème.

14ème série de problèmes: DISQUE ET FIL

Problème 14.1 Un disque de rayon R centré à l'origine de l'axe des coordonnées et occupant le plan $z = 0$ est chargé avec une densité de charge constante ρ_s [C/m²]



- Trouver le potentiel V et le champ électrique \mathbf{E} sur l'axe z
- Quelle est la différence entre les valeurs de V et de \mathbf{E} calculées en $z = 0^+$ et $z = 0^-$?
- Faire tendre le rayon R vers ∞ pour étudier un plan infini chargé (feuille de charge).

14.1.a) On travaille ici en coordonnées cylindriques circulaires, et il faut bien faire attention de ne pas confondre la coordonnée ρ avec la densité de charge de surface ρ_s . Comme on a une symétrie de révolution, ni le potentiel ni le champ ne dépendent de la coordonnée φ — qui apparaît en revanche dans le processus d'intégration.

L'élément de surface est défini par $dA = \rho' d\varphi' d\rho'$ au point $(\rho', \varphi', 0)$.

Le potentiel en $(\rho, 0, z)$ est donné par
$$V(\rho, 0, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho_s \rho' d\varphi' d\rho'}{\sqrt{\rho^2 + z^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \varphi'}}$$

Cette intégrale n'est pas exprimable en termes de fonctions élémentaires, elle donne des intégrales elliptiques (§ 11.6.2). Mais sur l'axe des z on a $\rho = 0$ et tout se simplifie:

$$V(0, 0, z) = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^a \frac{\rho' d\rho'}{\sqrt{z^2 + \rho'^2}} = \frac{\rho_s}{2\epsilon} \left(\sqrt{z^2 + a^2} - |z| \right)$$

La valeur absolue de z dans le terme de droite est essentielle.

Pour trouver le champ électrique, il faudrait en principe connaître le potentiel en tout point, et pas seulement sur l'axe des z . Suite à la symétrie de la structure, on sait toutefois que sur l'axe des z , le champ électrique n'a qu'une composante selon z donnée par

$$\mathbf{E}(0, 0, z) = \mathbf{e}_z E_z(0, 0, z) = -\mathbf{e}_z \frac{dV(0, 0, z)}{dz} = \mathbf{e}_z \frac{\rho_s}{2\epsilon} \left(\text{sgn}(z) - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right)$$

14.1.b) Quand on applique les résultats obtenus dans la section précédente aux deux points $z = 0^+$ et $z = 0^-$ on trouve $\pm \frac{\rho_s}{2\epsilon}$.

On retrouve donc bien la condition sur la composante normale du champ de déplacement:

$$\mathbf{e}_z \cdot \left[\epsilon \mathbf{E}(0,0,0^+) - \epsilon \mathbf{E}(0,0,0^-) \right] = \rho_s$$

14.1.c) Quand le rayon a du disque tend vers l'infini, on trouve un plan infini chargé. La valeur limite pour le champ électrique se trouve sans problème:

$$\mathbf{E}_{\text{plan}}(x,y,z) = \mathbf{e}_z \frac{\rho_s}{2\epsilon} \text{sgn}(z)$$

En revanche, on trouve que le potentiel devient infini partout... Ceci résulte du fait que la charge totale sur le plan de dimensions infinies est infinie. Dans tout système fini de charges le potentiel tend vers zéro à l'infini – ce qui est admis implicitement lorsqu'on pose l'intégrale. Ceci n'est plus le cas pour un système infini. Si en revanche on pose que le potentiel sur la plaque est fini, par exemple nul à cause de la symétrie, on trouve le potentiel partout en intégrant le champ électrique:

$$V_{\text{plan}}(x,y,z) = - \int_0^z \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{E}_{\text{plan}}(x,y,z) dz = - \frac{\rho_s}{2\epsilon} |z|$$

Problème 14.2 Le segment $-L < z < +L$ de l'axe vertical z est occupé par un fil chargé avec une densité de charge constante λ [C/m]. Le milieu environnant est le vide.

14.2.a Trouver le potentiel électrostatique V en tout point de l'espace

Le problème a une symétrie axiale, de sorte que le potentiel ne dépend pas de ϕ

$$V(\rho,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{-L}^{+L} \frac{\lambda dz'}{\sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \left[\text{arsinh} \frac{z+L}{\rho} - \text{arsinh} \frac{z-L}{\rho} \right]$$

On peut vérifier que, comme la fonction arsinh est impaire, on a $V(-z) = V(z)$.

On peut aussi exprimer le potentiel avec des logarithmes népériens, sachant que

$$\text{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = -\ln\left(-x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

14.2.b Particulariser le résultat au plan médian $z = 0$ et à l'axe z ($\rho = 0$)

$$\text{En } z = 0, \quad V(\rho,0) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \text{arsinh} \frac{L}{\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + \rho^2}}{\rho}$$

$$\text{En } \rho = 0, \quad V(0,z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} [\infty - \infty] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{z+L + |z+L|}{z-L + |z-L|}$$

Dans ce dernier cas, les arsinh donnent une indétermination, tandis que la solution avec des logarithmes népériens est tout à fait définie (attention aux valeurs absolues!). Il faut distinguer trois régions

$$\ast \quad z > L \quad V(0, z > L) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{z+L}{z-L}$$

$$\ast \quad -L < z < L \quad V(0, z < -L) = \infty \quad \text{sur le fil chargé}$$

$$\ast \quad z < -L \quad V(0, z < -L) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{z-L}{z+L} \quad \text{par symétrie}$$

14.2.c Calculer le champ électrique dans le plan médian et sur l'axe z

Dans le plan médian $\mathbf{E}(\rho, 0) = \mathbf{e}_\rho E_\rho(\rho, 0) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \frac{L}{\rho\sqrt{L^2 + \rho^2}}$

Sur l'axe z avec $|z| > L$ $\mathbf{E}(0, z) = \mathbf{e}_z E_z(0, z) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \frac{L}{z^2 - L^2} \text{sgn}(z)$

14.2.d Obtenir une formule approchée dans le plan médian lorsque $\rho \gg L$

En prenant les développements limités et en conservant le premier terme non nul, on trouve

$$V(\rho \rightarrow \infty, 0) = \frac{2\lambda L}{\rho} = \frac{q}{\rho} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(\rho \rightarrow \infty, 0) = \mathbf{e}_\rho \frac{2\lambda L}{\rho^2} = \mathbf{e}_\rho \frac{q}{\rho^2}$$

Il s'agit du potentiel et du champs créés par une charge ponctuelle $2\lambda L = q$ placée à l'origine.

14.2.e Étudier le cas limite quand la longueur du fil devient infinie.

Il est aussi intéressant de noter que, si l'on fait tendre L vers ∞ on trouve bien le champ électrique, qui vaut alors $E(\rho, 0) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\rho}$

En revanche, prenant la limite pour le potentiel, on trouve de nouveau ∞ (comme dans le problème précédent), qui résulte du fait que la charge totale est infinie. Si l'on intègre la relation pour le champ électrique, on trouve que

$$V(\rho, 0) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \rho$$

Le potentiel est alors infini sur l'axe et à l'infini, mais il est défini partout ailleurs.

15ème série de problèmes: SPHÈRES

Problème 15.1 On considère une surface sphérique de rayon R chargée avec une densité de charge constante ρ_s [C/m²] Trouver le potentiel V et le champ électrique \mathbf{E} à l'intérieur et à l'extérieur de la surface

15.1.a Avec le théorème de Gauss ($\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E} \rightarrow V$)

Le problème est à symétrie sphérique, de sorte que le champ électrique est purement radial et que le potentiel ne dépend que de la coordonnée radiale r . Considérant une sphère de rayon r on obtient la relation

$$\oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 \epsilon_0 E_r = Q_v \quad \text{charge totale dans la sphère}$$

h si $r < R$ (intérieur) $Q_v = 0$ et donc $E_r = 0$

h si $r > R$ (extérieur) $Q_v = 4\pi r^2 \rho_s$ et donc $E_r = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \frac{R^2}{r^2}$

On trouve ensuite le potentiel en intégrant le champ électrique

$$V(r) = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int E_r \cdot dr + cste.$$

à l'extérieur de la sphère, le potentiel doit tendre vers zéro à l'infini, car la charge totale est bornée. On a donc

$$\text{si } r > R \quad V(r > R) = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \frac{R^2}{r}$$

Comme à l'intérieur de la sphère il n'y a pas de champ, le potentiel est constant. Il doit être continu en $r = R$ et on a donc

$$\text{si } r < R \quad V(r) = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} R$$

15.1.b Par intégration directe de l'effet des charges de surface ($V \rightarrow \mathbf{E}$)

Une méthode beaucoup plus compliquée (utilisée surtout par certains étudiants pendant les examens) consiste à intégrer l'effet de la charge de surface sur la sphère. L'élément de surface est donné par $R^2 \sin \theta d\theta d\phi$ et la distance d'un point (R, θ', ϕ') sur la surface de la sphère à un point d'observation $(r, 0, 0)$ est donné par $\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}$ (théorème du cosinus). Le potentiel est alors donnée par la relation (11.37)

$$V(r) = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{dS'}{|r - r'|} = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{R^2 \sin \theta d\theta}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}}$$

$$= \frac{\rho_s R}{2\epsilon_0 r} \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta} \Big|_0^\pi = \frac{\rho_s R}{2\epsilon_0 r} [r + R - |r - R|]$$

à l'intérieur de la sphère $r < R$ et donc $V(r < R) = \frac{\rho_s R}{2\epsilon_0 r} [r + R + r - R] = \frac{\rho_s R}{\epsilon_0}$

à l'extérieur de la sphère $r > R$ et donc $V(r > R) = \frac{\rho_s R}{2\epsilon_0 r} [r + R - r + R] = \frac{\rho_s R^2}{\epsilon_0 r}$

On constate que ces valeurs sont bien celles données par la première méthode, et on trouve le champ électrique en dérivant par rapport à r .

Problème 15.2 Un nuage de charge de forme sphérique et de rayon a est décrit par une densité de charge constante ρ [C/m³]. Le nuage est enfermé à l'intérieur d'une coque sphérique d'un matériau diélectrique d'épaisseur a et de permittivité relative $\epsilon_r = 2$. L'ensemble est placé dans le vide. Trouver le potentiel et le champ électrique en tout point de l'espace.

15.2.a Avec l'équation de Gauss ($\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E} \rightarrow V$)

On a également un problème à symétrie sphérique, et les premières relations du problème précédent sont aussi valables. La charge totale contenue dans une sphère de rayon r est ici donnée par

$$\text{si } r < a \quad Q_V = \frac{4\pi r^3}{3} \rho \quad \text{si } r > a \quad Q_V = \frac{4\pi a^3}{3} \rho$$

On obtient donc le potentiel et le champ électrique dans les trois régions

$$\begin{array}{lll} r < a & E_r(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} & V(r) = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \frac{5\rho a^2}{12\epsilon_0} \\ a < r < 2a & E_r(r) = \frac{\rho a^3}{6\epsilon_0 r^2} & V(r) = \frac{\rho a^3}{6\epsilon_0 r} + \frac{\rho a^2}{12\epsilon_0} \\ 2a < r & E_r(r) = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} & V(r) = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r} \end{array}$$

Les constantes qui sont apparues lors de l'intégration pour obtenir V ont été déterminées pour que le potentiel tende vers zéro à l'infini et qu'il soit continu en $r = a$ et en $r = 2a$

15.2.b Avec l'équation de Poisson ($V \rightarrow \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{D}$)

L'équation de Poisson dans un système de charges à symétrie sphérique est donné par

$$\nabla^2 V(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV(r)}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

On multiplie par r^2 , puis on intègre par rapport à r , après quoi on divise par r^2 et on intègre par rapport à r . Dans les trois régions on obtient – en se rappelant qu’une constante d’intégration apparaît à chaque intégration:

$$\begin{array}{lll}
 r < a & V(r) = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \frac{C_1}{r} + C_2 & E_r(r) = -\frac{\rho r}{3\epsilon_0} + \frac{C_1}{r^2} \\
 a < r < 2a & V(r) = \frac{C_3}{r} + C_4 & E_r(r) = \frac{C_3}{r^2} \\
 2a < r & V(r) = \frac{C_5}{r} + C_6 & E_r(r) = \frac{C_5}{r^2}
 \end{array}$$

On doit poser $C_1 = 0$ pour que le potentiel ne soit pas singulier au centre de la sphère (car il n’y a pas de charge ponctuelle dans la donnée du problème). Comme la charge totale est bornée, le potentiel à l’infini doit tendre vers zéro et donc $C_6 = 0$. Il reste quatre constantes à déterminer en imposant la continuité de V et de D_r en $r = a$ et en $r = 2a$. Le lecteur pourra vérifier qu’on retrouve bien ainsi le potentiel et le champ obtenus dans 15.2.a.

THAT’S ALL, FOLKS !!