

Préface

Généralement, on appelle *programmation mathématique* la recherche de l'optimum d'une fonction de plusieurs variables liées entre elles par des contraintes (sous forme d'égalités ou d'inégalités)⁽¹⁾.

Nombreux sont les problèmes de décision qui se ramènent à un modèle de programmation mathématique. Ici nous nous intéresserons au cas où la fonction à optimiser ainsi que toutes les contraintes sont linéaires. On aura alors affaire à un problème de *programmation linéaire*.

Les applications qui ont été faites de la programmation linéaire ces dernières années sont très variées. Cela tient bien sûr au fait que le modèle est relativement général et permet de traiter une quantité de problèmes de gestion scientifique. Mais cela est dû aussi au fait qu'il existe des algorithmes extrêmement efficaces pour obtenir des solutions. La méthode du simplexe développée par G. B. Dantzig (vers 1947) a conduit à plusieurs algorithmes généraux qui permettent de résoudre aisément des problèmes de taille considérables (plusieurs dizaines de milliers de variables et plusieurs milliers de contraintes).

Comme bien des méthodes de la recherche opérationnelle, la programmation linéaire est souvent considérée comme une technique informatique standard. On trouve en effet de nombreux codes de programmation linéaire sur le marché. Ces codes sont souvent incorporés dans le logiciel de base fourni avec les ordinateurs. Tout ingénieur n'aura pas nécessairement l'occasion de devoir un jour écrire de tels codes, mais il sera certainement amené à les utiliser ou à les faire utiliser. Le recours à ces codes nécessite une certaine connaissance du problème et des techniques employées.

C'est la raison pour laquelle dans la première partie nous avons cherché à exposer les fondements mathématiques de la programmation linéaire. Nous avons donné, quand cela présentait quelque intérêt, les as-

⁽¹⁾ Notons que le mot « programmation » n'a pas ici le sens usuel (élaboration d'un programme pour ordinateur); il est utilisé car un ensemble de valeurs des variables satisfaisant les contraintes d'un problème de programmation mathématique est parfois appelé un programme.

pects géométriques ainsi qu'algébriques afin de rendre les choses aussi intuitives que possible.

Le chapitre 1 étudie la notion de convexité qui est essentielle dans le développement de la programmation linéaire. Les propriétés données dans ce chapitre seront utilisées constamment dans les chapitre ultérieurs.

Dans les chapitres 7 et suivants, nous nous intéressons aux applications de la programmation linéaire en optimisation combinatoire. Les idées et les méthodes de la première partie sont appliquées à des problèmes de cheminement et de circulation dans des graphes et des réseaux. De tels modèles interviennent très souvent lorsqu'il s'agit de modéliser des systèmes techniques complexes formés d'une multitude de composantes élémentaires reliées les unes aux autres (réseau de distribution d'énergie, réseau d'ordinateurs, systèmes d'exploitation, etc.).

Diverses extensions de la programmation linéaire seront considérées dans la dernière partie de ce tome. Tout d'abord la programmation non linéaire (modèles d'optimisation de fonctions non linéaires en variables continues, avec ou sans contraintes) pour lesquelles les éléments fondamentaux seront décrits au chapitre 12. Puis au chapitre 13, l'optimisation linéaire en variables discrètes fera appel entre autre aux algorithmes du simplexe de la programmation linéaire.

Un aperçu de la classe générale des méthodes de points intérieurs sera donné au chapitre 14 et enfin au chapitre 15, on présentera un modèle d'ordonnancement faisant appel à la programmation linéaire et à des résultats fondamentaux de théorie des graphes.

Ce texte s'adresse aux étudiants ingénieurs et mathématiciens des écoles polytechniques et universités, ainsi qu'aux enseignants de degré secondaire. Il présente les notions de base liées aux méthodes d'optimisation qu'utilise la recherche opérationnelle. L'accent a été mis sur la présentation de ces concepts sans insister sur l'immensité du champ d'application des techniques qui leur sont liées. Nous supposons que le lecteur est familiarisé avec les rudiments de l'algèbre linéaire. Pour faciliter l'assimilation des connaissances introduites dans le texte, nous avons inclus quelques exercices à la fin des chapitres ; les solutions de certains d'entre eux sont donnés à la fin du livre.

Remerciements

Ce texte a été rédigé dans l'optique d'un manuel destiné à accompagner un enseignement de recherche opérationnelle à des ingénieurs mathématiciens et informaticiens. Nous tenons à remercier les auditrices et auditeurs des divers cours donnés sur ce sujet ; leurs remarques et leurs critiques nous ont forcés à reprendre et à remanier des versions préliminaires de ce livre afin de les rendre plus digestes.

Notre gratitude s'adresse aussi à MM. A. Hertz et E. Taillard qui se sont chargés d'harmoniser les exercices avec les notions introduites dans les divers chapitres.

Les figures sont l'œuvre de MM. R.-P. Bonvin et M. Widmer ; qu'ils trouvent ici l'expression de notre reconnaissance admirative.

Table des matières

AVANT-PROPOS	v
PRÉFACE	vii
TABLE DES MATIÈRES	xi
INTRODUCTION	1
Problème 1. Epuration d'un cours d'eau	1
Problème 2. Dépouillement de résultats expérimentaux	2
Problème 3. Ordonnancement de travaux sur un chantier	3
Problème 4. Production d'énergie électrique	5
Problème 5. Schémas de séparation chromatographique en chimie	6
Problème 6. Trajets d'un convoyeur dans un entrepôt	8
CHAPITRE 1 Convexité et optimisation linéaire	11
1.1 Définitions générales relatives à la convexité	11
1.2 Hyperplans d'appui	15
1.3 Optimisation de fonctions convexes	19
1.4 Formulation du problème de programmation linéaire	24
1.5 Interprétation géométrique	25
1.6 Interprétation économique de la programmation linéaire	26
1.7 Inégalités linéaires	27
1.8 Exercices	31

CHAPITRE 2	Dualité	35
	2.1 Dual d'un problème de programmation linéaire	35
	2.2 Interprétation économique de la dualité	37
	2.3 Théorème de dualité	38
	2.4 Théorème des écarts complémentaires	42
	2.5 Exercices	45
CHAPITRE 3	Résolution du problème de programmation linéaire	49
	3.1 Rappel sur les égalités linéaires	49
	3.2 Propriétés fondamentales de la programmation linéaire	52
	3.3 Méthode de Gauss-Jordan	59
	3.3.1 Opération de pivotage	59
	3.3.2 La forme tableau	67
	3.3.3 Passage à une base « voisine » admissible	69
	3.4 Algorithme du simplexe	71
	3.5 Exemples	76
	3.5.1 Un bon exemple	76
	3.5.2 Absence de solutions optimales finies	79
	3.5.3 Apparition de la dégénérescence	81
	3.5.4 Unicité de la solution optimale	84
	3.6 Exercices	88
CHAPITRE 4	Compléments sur l'algorithme du simplexe	93
	4.1 Algorithme fini du simplexe	93
	4.2 Initialisation de l'algorithme du simplexe	97
	4.3 Algorithme dual du simplexe	102
	4.4 Retour à l'interprétation économique	108
	4.5 Lecture des variables duales dans le tableau du simplexe	111
	4.6 Exercices	113
CHAPITRE 5	Variations sur le simplexe	115
	5.1 Algorithme du simplexe avec variables bornées	115
	5.2 Postoptimisation et analyse de sensibilité	120
	5.2.1 Introduction	120
	5.2.2 Modification du second membre \mathbf{b}	121
	5.2.3 Addition d'une nouvelle contrainte	124

	5.2.4	Modification des coefficients de la fonction économique.....	125
	5.2.5	Eléments d'analyse de sensibilité.....	127
	5.3	Programmation paramétrique.....	129
	5.4	Exercices.....	132
CHAPITRE 6		Autres algorithmes pour la programmation linéaire	135
	6.1	Méthode révisée du simplexe.....	135
	6.1.1	Eta-factorisation de la base.....	135
	6.1.2	Algorithme révisé du simplexe.....	137
	6.2	Algorithme primal-dual.....	140
	6.2.1	Notions de base.....	141
	6.2.2	Formulation.....	142
	6.2.3	Justification de l'algorithme.....	143
	6.3	Méthode de décomposition de Dantzig-Wolfe..	147
	6.3.1	Généralités.....	147
	6.3.2	Formulation de l'algorithme.....	149
	6.3.3	Un exemple numérique.....	151
	6.4	Minimisation de fonctions convexes séparables.	155
	6.5	Exercices.....	157
CHAPITRE 7		Eléments de théorie des graphes	159
	7.1	Concepts fondamentaux de théorie des graphes.....	159
	7.2	Représentations d'un graphe.....	162
	7.2.1	Matrice d'incidence sommets-arcs.....	162
	7.2.2	Listes d'adjacence.....	166
	7.3	Exploration d'un graphe.....	167
	7.3.1	Algorithme d'exploration.....	168
	7.3.2	Algorithme de recherche d'un chemin de s à t	170
	7.4	Recherche d'un plus court chemin dans un réseau.....	172
	7.4.1	Méthode primale-duale.....	172
	7.4.2	Quelques algorithmes particuliers.....	179
	7.5	Exercices.....	183
CHAPITRE 8		La méthode du simplexe dans les réseaux	185
	8.1	Le problème de transbordement.....	185
	8.1.1	La méthode du simplexe.....	189
	8.1.2	Calculs des λ_i	194

	8.1.3	Dégénérescence	195
	8.1.4	Détermination d'une solution-arbre admissible initiale.....	198
	8.2	Algorithme fini du simplexe pour les réseaux ..	200
	8.3	Le problème de transport	204
	8.3.1	Formulation.....	204
	8.3.2	Construction d'une solution-arbre admissible initiale.....	206
	8.3.3	Exemple d'application de l'algorithme du transbordement particularisé au problème de transport.....	207
	8.3.4	Dégénérescence	211
	8.4	Théorème des valeurs entières.....	214
	8.5	Implantation de l'algorithme du simplexe dans les réseaux.....	218
	8.5.1	Choix de l'arc entrant dans T	219
	8.5.2	Modification de \mathbf{x} et $\boldsymbol{\lambda}$	219
	8.5.3	Modification de T	224
	8.6	Exercices	228
CHAPITRE 9		Flot de valeur maximum	231
	9.1	Le problème du flot maximum	231
	9.1.1	Formulation et propriétés	231
	9.1.2	Algorithme de Ford-Fulkerson.....	234
	9.1.3	Justification de l'algorithme.....	237
	9.2	Algorithme de flot maximum Malhotra-Kumar-Maheshwari (MKM).....	240
	9.2.1	Idée et formulation de l'algorithme	240
	9.2.2	Analyse de la complexité de l'algorithme MKM.....	248
	9.3	Applications de la notion de flot	250
	9.4	Exercices	260
CHAPITRE 10		Flots à coût minimum et flots compatibles	263
	10.1	Algorithme primal-dual pour le problème de transport	263
	10.2	Flot à coût minimum	270
	10.2.1	Formulation et propriétés	270
	10.2.2	Deux algorithmes	275
	10.3	Le problème de transbordement avec capacités et bornes inférieures de flot	283

10.4	Circulation dans un réseau avec capacités et bornes inférieures de flot	290
10.5	Exercices	294
CHAPITRE 11	Arbres optimaux et matroïdes	297
11.1	Arbre de poids optimum	297
11.2	Propriétés supplémentaires des arbres optimaux	303
11.3	Matroïdes	306
11.4	Exercices	310
CHAPITRE 12	Eléments d'optimisation non linéaire	311
12.1	Conditions d'optimalité	311
12.2	Complément sur les conditions de Kuhn-Tucker	316
12.3	Compléments sur la fonction de Lagrange et la dualité	319
12.4	Optimisation sans contraintes	322
12.4.1	Méthode de la plus grande pente	322
12.4.2	Méthode de Newton	323
12.4.3	Méthodes des directions conjuguées	324
12.5	Méthode des directions admissibles pour l'optimisation avec contraintes	330
12.5.1	Cas des contraintes linéaires	330
12.6	Exercices	332
CHAPITRE 13	Quelques méthodes de programmation linéaire en nombres entiers	333
13.1	Introduction	333
13.2	Méthode des plans sécants (<i>cutting planes</i>)	333
13.3	Méthodes de séparation et d'évaluation (<i>branch and bound</i>)	340
13.4	Exercices	346
CHAPITRE 14	Méthodes de points intérieurs	347
14.1	Introduction	347
14.2	La méthode AS (<i>affine scaling</i>)	348
14.3	Algorithme de réduction du potentiel	353
14.4	Méthodes de cheminement	355
14.5	L'algorithme de cheminement primal-dual	358
14.6	Exercices	362

CHAPITRE 15	Quelques problèmes d’ordonnancement	363
15.1	Introduction	363
15.2	Un problème d’ordonnancement sur plusieurs processeurs	363
15.3	Le modèle à deux phases	364
15.4	Le modèle d’atelier ouvert	365
15.5	Atelier ouvert sans interruption des opérations	368
15.6	Remarques finales	370
15.7	Exercices	371
SOLUTIONS DE QUELQUES EXERCICES		373
BIBLIOGRAPHIE		379
INDEX		383