

Introduction

Ce recueil de 1 277 exercices est destiné en premier lieu aux étudiants du premier cycle universitaire qui suivent pour la première fois un cours d'analyse (calcul différentiel et intégral) concernant les fonctions réelles d'une variable réelle. Il s'adresse aussi à tous ceux qui s'intéressent ou veulent approfondir l'un ou l'autre des sujets traités.

Le contenu de ce livre correspond au cours d'analyse que l'auteur enseigne, depuis plusieurs années, aux étudiants du premier semestre de différentes sections de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL). Le choix des exercices sert aussi bien à vérifier du degré d'acquisition par l'étudiant de la théorie que de son habilité à les résoudre. Il est bon de rappeler ici que le meilleur moyen de devenir familier avec l'analyse est de résoudre un maximum d'exercices. Et plus on en résout, plus on a de la chance de pouvoir les résoudre. On acquiert ainsi un savoir-faire dont l'intuition, élément indispensable en mathématique, ne devrait pas être absente.

D'un point de vue pratique, ce livre contient 9 chapitres qui sont divisés chacun en deux parties.

- 1) La première partie est un rappel non exhaustif de toutes les principales définitions et tous les principaux résultats qu'il faut connaître sur le sujet traité. Les propositions sont énoncées avec précision mais sans leur démonstration. Les exemples donnés doivent être connus, car ils reviennent en permanence dans les exercices.
- 2) La deuxième partie est un recueil d'exercices concernant le sujet traité. Pour les résoudre, une bonne connaissance des définitions, propositions et exemples donnés dans la première partie sont exigés de la part de l'étudiant. C'est pourquoi une bonne assimilation de la théorie est nécessaire, mais malheureusement pas forcément suffisante, pour arriver à résoudre tous les exercices. Pour certains d'entre eux, la connaissance des chapitres précédents est parfois nécessaire. Pour chaque exercice, un corrigé est donné à la fin du livre. Chaque corrigé est fait en fonction de la difficulté de l'exercice. Les exercices difficiles s'adressent plus particulièrement aux étudiants des sections mathématique et physique.

A la fin du livre, un formulaire est donné. Le contenu de ce formulaire devrait permettre de résoudre tous les exercices sans avoir recours à une aide extérieure. Néanmoins, il est vivement recommandé de se familiariser avec les différents logiciels mathématiques proposés sur le marché pour résoudre les

exercices qui s’y prêtent, après, bien sûr, avoir essayé de les résoudre par soi-même.

Pour ceux qui s’intéressent aux démonstrations, je recommande comme livre de référence : Jacques Douchet et Bruno Zwahlen *Calcul différentiel et intégral*, tome 1, Presses polytechniques et universitaires romandes (PPUR).

Enfin, n’étant pas propriétaire des exercices contenus dans ce livre, j’encourage tous mes collègues à les utiliser à bon escient et sans restriction, ainsi que d’en faire profiter pleinement leurs étudiants.

Finalement, je souhaite à tous les étudiants beaucoup de plaisir à faire les exercices proposés et rappelle que ce n’est qu’en persévérant que l’on arrive à ses fins.

Remerciements

Je tiens à remercier ici toutes les personnes qui m’ont aidé à la réalisation de ce livre. En particulier, Văn Duộc Lê qui a relu le manuscrit et qui s’est occupé de l’importante partie informatique. Mes remerciements vont aussi à Victoria Rezzonico pour les dessins, à Marie-France De Carmine pour son aide et ses remarques judicieuses ainsi qu’aux Presses polytechniques et universitaires romandes (PPUR) qui ont accepté de publier ce livre en faisant preuve d’un grand professionnalisme.

Jacques Douchet

Table des matières

Introduction	v	
Table des matières	vii	
CHAPITRE 1	Nombres réels	1
1.1	Introduction	1
1.2	Propriétés	1
1.3	Intervalle	1
1.4	Valeur absolue	2
1.5	Partie entière	3
1.6	Minorant – Borne inférieure	3
1.7	Majorant – Borne supérieure	4
1.8	Sous-ensemble borné	4
1.9	Raisonnement par récurrence	4
1.10	Exercices	4
CHAPITRE 2	Suites numériques	7
2.1	Introduction	7
2.2	Suites bornées	7
2.3	Limite d'une suite	7
2.4	Limites infinies	9
2.5	Suites de Cauchy	11
2.6	Sous-suites	11
2.7	Limite supérieure	12
2.8	Exercices	13
CHAPITRE 3	Nombres complexes	19
3.1	introduction	19
3.2	Forme polaire	20
3.3	Formule de Moivre	21
3.4	Racines d'un nombre complexe	21
3.5	Décomposition d'un polynôme	22
3.6	Exercices	22
CHAPITRE 4	Fonctions d'une variable	25
4.1	Introduction	25
4.2	Fonction monotone	27

4.3	Fonction paire – Fonction impaire.....	27
4.4	Fonction périodique.....	28
4.5	Fonction bornée.....	28
4.6	Supremum et infimum d'une fonction.....	28
4.7	Maximum et minimum d'une fonction.....	29
4.8	Limite d'une fonction.....	29
4.9	Limites infinies.....	31
4.10	Limites à l'infini.....	32
4.11	Limite à droite.....	33
4.12	Limite à gauche.....	34
4.13	Fonctions continues.....	35
4.14	Continuité unilatérale.....	36
4.15	Continuité sur un sous-ensemble.....	37
4.16	Continuité uniforme.....	38
4.17	Convergence simple.....	39
4.18	Convergence uniforme.....	39
4.19	Fonctions trigonométriques.....	40
4.20	Fonction exponentielle.....	42
4.21	Fonction logarithme népérien.....	43
4.22	Fonction logarithme de base a	44
4.23	Fonction exponentielle de base a	44
4.24	Fonction puissance.....	45
4.25	Fonctions hyperboliques.....	46
4.26	Exercices.....	51
CHAPITRE 5	Calcul différentiel.....	61
5.1	Introduction.....	61
5.2	Théorèmes.....	65
5.3	Polynôme de Taylor.....	68
5.4	Fonction convexe.....	70
5.5	Asymptotes.....	71
5.6	Etude d'une fonction.....	73
5.7	Courbe paramétrée.....	74
5.8	Exercices.....	75
CHAPITRE 6	Calcul intégral.....	91
6.1	Introduction.....	91
6.2	Primitives.....	94
6.3	Intégration par parties.....	95
6.4	Changement de variable.....	95
6.5	Intégration des fonctions rationnelles.....	97
6.6	Applications géométriques.....	98
6.7	Exercices.....	102

CHAPITRE 7	Intégrales généralisées	115
	7.1 Sur l'intervalle borné $]a, b]$	115
	7.2 Sur les intervalles bornés $[a, b[$ et $]a, b[$	118
	7.3 Sur un intervalle fermé non borné	119
	7.4 Sur un intervalle ouvert non borné	122
	7.5 Exercices	123
CHAPITRE 8	Séries	129
	8.1 Séries numériques	129
	8.2 Séries entières	132
	8.3 Exercices	135
CHAPITRE 9	Equations différentielles	143
	9.1 Equations linéaires du premier ordre	143
	9.2 Equations différentielles du second ordre	144
	9.3 Equation de Bernoulli	146
	9.4 Equation de Ricatti	147
	9.5 Equations à variables séparées	147
	9.6 Equations homogènes	148
	9.7 Exercices	149
SOLUTIONS DES EXERCICES DU CHAPITRE 1	Nombres réels	157
SOLUTIONS DES EXERCICES DU CHAPITRE 2	Suites numériques	165
SOLUTIONS DES EXERCICES DU CHAPITRE 3	Nombres complexes	193
SOLUTIONS DES EXERCICES DU CHAPITRE 4	Fonctions d'une variable	201
SOLUTIONS DES EXERCICES DU CHAPITRE 5	Calcul différentiel	229
SOLUTIONS DES EXERCICES DU CHAPITRE 6	Calcul intégral	291
SOLUTIONS DES EXERCICES DU CHAPITRE 7	Intégrales généralisées	327
SOLUTIONS DES EXERCICES DU CHAPITRE 8	Séries	359
SOLUTIONS DES EXERCICES DU CHAPITRE 9	Equations différentielles	385
Formulaire		397
Bibliographie		403
Index		405