

Table des matières

Avant-propos	vii	
Introduction	xiii	
CHAPITRE 1	Quaternions	1
1.1	Structure de groupe	1
1.2	Groupes finis d'ordre $n \leq 8$	2
1.3	Groupe des quaternions	5
1.4	Algèbre des quaternions \mathbb{H}	6
1.4.1	Définitions	6
1.4.2	Forme polaire	8
1.4.3	Racine carrée et racine $n^{\text{ième}}$	9
1.4.4	Autres fonctions et représentation des quaternions	11
1.5	Calcul vectoriel classique	12
1.5.1	Produit scalaire et produit vectoriel	12
1.5.2	Produit mixte et double produit vectoriel	13
1.6	Exercices	15
CHAPITRE 2	Groupes de rotation $\text{SO}(4)$ et $\text{SO}(3)$	17
2.1	Groupes orthogonaux $\text{O}(4)$ et $\text{SO}(4)$	17
2.2	Groupes orthogonaux $\text{O}(3)$ et $\text{SO}(3)$	20
2.3	Groupes cristallographiques	21
2.3.1	Groupes cycliques doubles C_n (ordre $N = 2n$)	22
2.3.2	Groupes dièdriques doubles D_n ($N = 4n$)	22
2.3.3	Groupe tétraédrique double ($N = 24$)	23
2.3.4	Groupe octaédrique double ($N = 48$)	24
2.3.5	Groupe icosaédrique double ($N = 120$)	25
2.4	Transformations infinitésimales de $\text{SO}(4)$	26
2.5	Symétries et invariants : problème de Kepler	29
2.6	Exercices	31
CHAPITRE 3	Quaternions complexes	33
3.1	Algèbre des quaternions complexes $\mathbb{H}(\mathbb{C})$	33
3.2	Groupes de Lorentz $\text{O}(1, 3)$ et $\text{SO}(1, 3)$	34
3.2.1	Métrie	34
3.2.2	Symétrie plane	34
3.2.3	Groupes $\text{O}(1, 3)$ et $\text{SO}(1, 3)$	35

3.3	Groupe de Lorentz propre, orthochrone	37
3.3.1	Propriétés	37
3.3.2	Transformation infinitésimale de $SO(1, 3)$	39
3.4	Quadrivecteurs et multivecteurs dans $\mathbb{H}(\mathbb{C})$	40
3.5	Cinématique relativiste via $\mathbb{H}(\mathbb{C})$	42
3.5.1	Transformation spéciale de Lorentz.....	42
3.5.2	Transformation générale de Lorentz pure.....	43
3.5.3	Composition des vitesses.....	44
3.6	Equations de Maxwell.....	45
3.7	Groupe des transformations conformes.....	47
3.8	Exercices	50
CHAPITRE 4	Algèbre de Clifford	51
4.1	Algèbre de Clifford.....	51
4.1.1	Définitions	51
4.1.2	Algèbre de Clifford $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ sur \mathbb{R}	52
4.2	Calcul multivectoriel dans $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$	53
4.2.1	Produits extérieurs et intérieurs avec un vecteur	53
4.2.2	Produits entre deux multivecteurs.....	55
4.2.3	Formules générales.....	56
4.2.4	Calcul vectoriel classique.....	58
4.3	Géométrie multivectorielle	58
4.3.1	Géométrie analytique	58
4.3.2	Projections orthogonales	60
4.4	Opérateurs différentiels	62
4.4.1	Définitions	62
4.4.2	Eléments infinitésimaux de courbes, surfaces et hypersurfaces.....	63
4.4.3	Théorèmes généraux	65
4.5	Exercices	66
CHAPITRE 5	Groupes de symétrie	67
5.1	Groupes pseudo-orthogonaux $O(1, 3)$ et $SO(1, 3)$	67
5.1.1	Métrie.....	67
5.1.2	Symétrie par rapport à un hyperplan.....	67
5.1.3	Groupes pseudo-orthogonaux $O(1, 3)$ et $SO(1, 3)$	69
5.2	Groupe de Lorentz propre orthochrone.....	70
5.2.1	Groupe de rotation $SO(3)$	70
5.2.2	Transformation de Lorentz pure.....	71
5.2.3	Transformation de Lorentz générale.....	72
5.3	Groupe des transformations conformes.....	74
5.3.1	Définitions	74
5.3.2	Propriétés des transformations conformes	75
5.3.3	Transformation de multivecteurs	76

5.4	Algèbre de Dirac.....	77
5.4.1	Equation de Dirac.....	77
5.4.2	Groupes unitaire et symplectique unitaire.....	78
5.5	Exercices.....	79
CHAPITRE 6	Relativité restreinte	81
6.1	Transformation de Lorentz.....	81
6.1.1	Transformation de Lorentz spéciale.....	81
6.1.2	Conséquences.....	82
6.1.3	Transformation générale de Lorentz.....	83
6.2	Cinématique relativiste.....	84
6.2.1	Quadrivecteurs.....	84
6.2.2	Composition des vitesses.....	87
6.3	Dynamique relativiste d'une masse ponctuelle.....	89
6.3.1	Quadrivecteur impulsion-énergie.....	89
6.3.2	Quadrivecteur force.....	90
6.4	Exercices.....	92
CHAPITRE 7	Electromagnétisme classique	93
7.1	Grandeurs électromagnétiques.....	93
7.1.1	Quadrivecteurs densité de courant et potentiel vecteur.....	93
7.1.2	Bivecteur champ électromagnétique.....	95
7.2	Equations de Maxwell.....	98
7.2.1	Formulation différentielle.....	98
7.2.2	Formulation intégrale.....	103
7.2.3	Force de Lorentz.....	104
7.3	Ondes électromagnétiques.....	105
7.3.1	Ondes électromagnétiques dans le vide.....	105
7.3.2	Ondes électromagnétiques dans un conducteur.....	106
7.3.3	Ondes électromagnétiques dans un milieu parfait.....	107
7.4	Optique relativiste.....	108
7.4.1	Expérience de Fizeau (1851).....	108
7.4.2	Effet Doppler.....	109
7.4.3	Aberration des étoiles fixes.....	111
7.5	Exercices.....	112
CHAPITRE 8	Relativité générale	113
8.1	Espace riemannien.....	113
8.2	Equations d'Einstein.....	114
8.3	Equation du mouvement.....	115
8.4	Applications.....	116
8.4.1	Métrie de Schwarzschild.....	116
8.4.2	Approximation linéaire.....	119

Conclusion	121
Solutions	123
ANNEXE A Formulaire : produits multivectoriels dans $\mathbb{H}(\mathbb{C})$	139
A.1 Produits avec des quadrivecteurs	139
A.2 Produits avec des bivecteurs	140
A.3 Produits avec des trivecteurs	140
A.4 Produits avec des pseudo-scalaires	141
ANNEXE B Formulaire : produits multivectoriels dans $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ (sur \mathbb{R})	143
B.1 Produits avec des quadrivecteurs	143
B.2 Produits avec des bivecteurs	144
B.3 Produits avec des trivecteurs	144
B.4 Produits avec des pseudo-scalaires	145
ANNEXE C Formulaire : opérateur quadrinabla ∇ dans $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ (sur \mathbb{R})	147
ANNEXE D Feuille de calculs : $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ (<i>Mathematica</i>)	149
ANNEXE E Feuille de calculs $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ sur \mathbb{R} (<i>Mathematica</i>)	151
ANNEXE F Feuille de calculs : matrice $M_2(\mathbb{H})$ (<i>Mathematica</i>)	153
ANNEXE G Algèbres de Clifford : isomorphismes	155
ANNEXE H Algèbres de Clifford : tableau synoptique	157
Bibliographie	159
Index	163